Genova, 07/05/2007

Le scuole fondazionali in matematica ai tempi di Wittgenstein

Verrà qui introdotta la filosofia della matematica "moderna". Con ciò intendo una riflessione filosofica sulla matematica nata ufficiosamente sul finire del 1800 e, ufficialmente, nei primi decenni del 1900. Si tratta di una riflessione oggi giunta, per così dire, già alla sua seconda generazione, dal momento ché la filosofia della matematica praticata a partire dagli anni '70 del Novecento, pur rappresentando la continuazione della filosofia di fine Ottocento e inizi Novecento, presenta elementi di originalità rispetto ad essa e ne prende le distanze sotto più punti di vista. Resta comunque che anche la filosofia della matematica di prima generazione, ovvero quella nata sul finire dell'Ottocento e agli inizi del Novecento, quando nacque si configurò come un *novum* nel contesto e della storia della matematica e della storia della filosofia. (sicchè l'espressione "moderna" da me utilizzata intende riferirsi a un tipo di riflessione sulla matematica che non solo è cronologicamente distante da altri resoconti filosofici sulla matematica prodotti dal pensiero occidentale nel corso del suo sviluppo ma anche differente da essi). Infatti la filosofia della matematica "moderna":

1. nasce in seguito a sollecitazioni provenienti direttamente dalla pratica della matematica ovvero come risposta a situazioni problematiche e sorprendenti venutesi a configurare entro la matematica stessa sul finire del XIX secolo;
2. è iniziata dagli stessi matematici di professione (*working mathematicians*) o, comunque, da personalità intellettuali che, se si occuparono pure di altro di professione (di filosofia, ad esempio), furono però senz'altro anche matematici di professione. Si pensi, ad esempio, a Frege e Russell, che noi chiameremmo più esattamente logici o logici matematici. Ma, si ricordi, la logica matematica nasce entro la matematica, ed in risposta ad esigenze della stessa, proprio a partire dalla fine dell'Ottocento per opera, tra gli altri, degli autori in questione. In altri termini, a partire dalla fine del XIX secolo, alcuni *working mathematicians*, sollecitati da certi sviluppi della matematica, cominciarono a dedicarsi ad una riflessione sulla loro prassi, volta a indagare questioni di verità o falsità di principi, validità o invalidità di risultati, affidabilità o inaffidabilità di procedure dimostrative.

Quali le sollecitazioni provenienti dalla pratica? Quali i risultato sorprendenti e/o problematici che portarono alla nascita della filosofia della matematica moderna? Guardiamo anzitutto agli autori e alle opere agli albori di quest'ultima:

- G. Frege, autore di: *Die Grundalgen der Arithmetik, eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl* (1884) [I fondamenti dell'aritmetica, una ricerca logico matematica sul concetto di numero], e di: *Die Grundegesetze der Arithmetik, begriffschriftlich abgeleitet* (1893/1903) [Le leggi fondamentali dell'aritmetica, dedotte in linguaggio ideografico]
- L. E. J. Brouwer, autore di "Intuitionism and Formalism" (1912) [Intuizionismo e formalismo]D. Hilbert autore di "Neubegründung der Mathematik. Erste Mitteilung" (1922) [Nuova fondazione dell'aritmetica. Prima comunicazione][1]

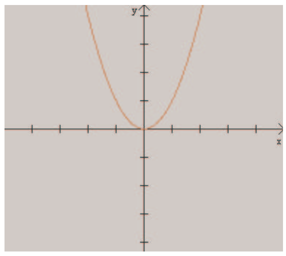
Le opere sopra riportate trattano tutte della nozione di *numero naturale* e della teoria dei *numeri naturali* (l'aritmetica), ove tale nozione e tale teoria sono intese come matematicamente centrali. Tale modo di guardare ai numeri naturali, non nuovo nella storia della filosifa, pare qui potersi interpretare come una consapevolezza che sta a monte delle riflessioni propriamente filosofiche di Frege, Brouwer, Hilbert, una consapevolezza condivisa entro la comunità matematica di fine Ottocento e maturata in essa sulla scorta di sviluppi matematici precisi, una consapevolezza che cominciò, sul finire del secolo, a dare a pensare a tale

[1] Traduzioni in inglese di parte dell'opera di Frege e dell'articolo di Brouwer si trovano in P. Benacerraf, H. Putnam, *Philosophy of Mathematics, Selected Readings*, Second Edition, Cambridge University Press, 1983. L'articolo di Hilbert, originariamente pubblicato in *Abhandlungen aus dem seminar der Hamburgischen Universität* 1 (1922), 157-77, si trova tradotto in inglese a cura di P. Mancosu, *From Brouwer to Hilbert. The Debate on the Foundation of Mathematics in the 1920s*, Oxford 1998.

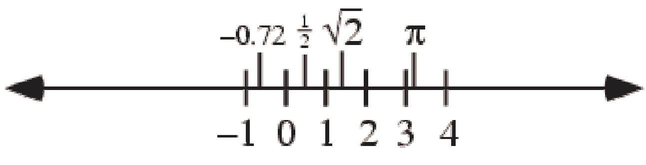
comunità a tal punto che alcuni dei suoi esponenti si sentirono chiamati al compito di interpretarne il senso, di spiegarla, di giustificarla.
La centralità della nozione di numero naturale, esattamente, venne configurandosi attraverso i processi che portarono alla nascita della disciplina matematica oggi nota come analisi. Quest'ultima fu a sua volta la risultante della *rigorizzazione* a cui, nella prima metà dell'Ottocento, furono sottoposte le nozioni, fino ad allora non esplicitamente definite, e le procedure, fino ad allora non codificate una volta per tutte a costituire un sistema di regole vincolante per tutti e ciascuno, della geometria analitica e del calcolo infinitesimale nati nel secolo XVII. Dall'analisi alla constatazione della centralità matematica della nozione di numero naturale e dell'aritmetica il passo, poi, fu breve.

Come dalle nozioni della geometria analitica e del calcolo infinitesimale si giunse, nella prima metà del sec. XVIII, all'analisi (per opera dei matematici B. Bolzano e A. Cauchy) e come dall'analisi si giunge, nella seconda metà dell'Ottocento, alla centralità matematica della nozione di numero naturale (per opera dell'aritmetizzazione dell'analisi condotta da matematici come R. Dedekind, G. Cantor, K. Weierstrass).

La geometria analitica è lo studio di enti geometrici attraverso le loro rappresentazioni algebriche, studio condotto sul piano cartesiano. Così in geometria analitica la figura qui sotto sarebbe intesa come espressione dell'equazione $y = x^2$, equazione che esprime come varia y al variare di (o in *funzione* del variare di) x.



Di funzioni si occupa anche il calcolo infinitesimale trattando di questioni come, ad esempio, la seguente: come varia y nella funzione $y = x^2$ al variare di x in maniera infinitesima rispetto ad un valore dato (si tratta di trovare la *derivata* di una funzione ove il compito si rivela di estremi interesse laddove si tratti di studiare il moto dei corpi rappresentandolo sul piano cartesiano, ché condizione onde poter calcolare la velocità istantanea di un corpo in moto).
Nella prima metà dell'Ottocento le nozioni e le operazioni della geometria analitica e del calcolo infinitesimale furono precisate nei termini della nozione di *limite* (da Cauchy) definita poi in termini puramente logico-algebrici senza riferimento ai concetti di tempo e moto, nella seconda metà dell'800 da Weierstrass (la famosa definizione δ ε).[2] Nei termini di tale nozione e operazione furono formulati tutti gli altri concetti fondamentali dell'analisi e le questioni relative al variare continuo di grandezze e alla velocità istanatnea di un corpo. Tali nozioni e operazione implicarono così una rigorizzazione.
Con ciò l'operazione di limite venne a configurarsi come l'operazione fondamentale dell'analisi e il suo oggetto venne identificandosi con l'insieme numerico in cui tale operazione può essere sempre condotta a termine, che deve essere tale da non presentare vuoti quando rappresentato sulla retta, appunto per permettere di descrivere il variare continuo di una grandezza. Quale è tale campo numerico? Si pensi ai numeri naturali (1, 2, 3, 4, ecc.). Essi variano in maniera tale che è possibile che tra due numeri naturali x e y tali che $x < y$ esistano numeri z non naturali tali che $x < z < y$. I numeri razionali (a/b *per a*, b naturali) sono diversi da questo punto di vista ché tra due numeri razionali x e y tali che $x < y$, esiste sempre uno z razionale tale che $x < z < y$. Si sa però che i numeri razionali non sono tutti i numeri che si possono rappresentare sulla retta, che ospita anche numeri come $\sqrt{2}$ o π che non possono essere scritti, salvo incorrere in una contraddizione, nella forma a/b *per a, b* naturali. Si osservi l'immagine seguente:



[2] Chiedersi come vari il valore della y al variare di x di pochissimo rispetto ad una valore dato, ad esempio t, significa domandarsi quale sia il limite a cui tende y - ovvero f(x) - per x che tende a t ove:

$$\text{Lim } x \rightarrow t \;\; f(x) = L \leftrightarrow_{\text{def}} \forall\varepsilon > 0 \;\exists\delta > 0 \mid |x - t| < \delta \rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Si tratta della cosiddetta *retta* reale, ché i *numeri reali* sono definiti appunto nei termini di (naturali+razionali+irrazionali) in maniera tale da "riempire" la retta senza lasciare spazi vuoti.
Con ciò la questione di dare una definizione matematica rigorosa della nozione di numero reale divenne il problema matematico per eccellenza della seconda metà dell'Ottocento. Ad esso risposero R. Dedekind, G. Cantor, K. Weierstrass mettendo a punto caratterizzazioni dei numeri reali in termini di insiemi (infiniti) di numeri razionali. Con ciò i numeri reali furono ridotti ai numeri razionali. Dato che i razionali a loro volta sono frazioni di interi ovvero possono essere ridotti ai numeri interi, questi ultimi vennero con ciò a caratterizzarsi come la "materia prima" dell'analisi (tanto che il processo descritto è noto nei termini di "aritmetizzazione dell'analisi") e, con ciò, della matematica *tout court* (che di fatto si era venuta identificando con l'analisi nel corso dell'Ottocento).

Giunta la matematica nel corso del suo sviluppo a mettere in evidenza la centralità matematica della nozione di numero naturale agli autori sopra citati si pose un compito che si configurava ad un tempo come compito tecnico e filosofico. Si trattava, cioè, per costoro, sia di operare una qualche riduzione rigorosa di tutte le altre nozioni e teorie matematiche alla nozione di numero naturale e alla teoria dei numeri naturali che di riflettere sul significato di tale riduzione, sul perché essa potesse legittimamente intendersi come una riduzione dal più incerto al più certo, dal più complicato al più semplice, del perché la centralità matematica della nozione di numero naturale e dell'aritmetica fosse una situazione non solo di fatto ma anche, per così dire, *de jure*.
Frege propose nei *Grundlagen* una riduzione logica, mostrando come la nozione di numero naturale e l'aritmetica potessero essere, rispettivamente, definita nei termini di nozioni puramente logiche e dedotta a partire da assiomilogici (quella usata da Frege non è però una logica del primo ordine e, inoltre, include nozioni insiemistiche).[3] Tale riduzione della nozione di numero naturale ad una nozione logica e dell'aritmetica alla logica poggia sull'affermazione fregeana che le affermazioni numeriche sono affermazioni relative a concetti precisata poi nei termini dell'affermazione che i numeri sono ovvero oggetti e non proprietà di oggetti quindi estensioni di concetti e non concetti.[4] Si prenda un'attribuzione numerica "le stagioni dell'anno sono 4". Essa è da intendersi come tale da dire che l'oggetto numero 4 cade sotto il concetto "stagioni dell'anno" (a anche sotto altri concetti, ad esempio "punti cardinali", "arti del corpo umano" ecc.), è l'estensione del concetto "stagioni dell'anno" (e degli altri concetti citati). Siano ora detti *equinumerosi* concetti tali che gli oggetti che cadono sotto uno di essi possono essere fatti corrispondere 1-1 agli oggetti che cadono sotto gli altri (possono trovarsi con loro in corrispondenza biunivoca). Ad esempio, i concetti "stagioni dell'anno", "punti cardinali", "arti del corpo umano" sono equinumerosi. Il numero 4, che cade sotto ciascuno dei concetti citati, potrà anche e specificamente essere inteso come l'estensione del concetto "equinumeroso con 'stagioni', 'lune di Giove', 'arti del corpo umano' ecc.". Più in generale ancora dire "*n* è un numero" significa dire "c'è un concetto F a cui il numero *n* si applica" nel senso che *n* è l'estensione del concetto *equinumeroso col concetto F*. Si possono con ciò definire i singoli numeri in termini logici:

0 è l'estensione del concetto "ineguale a se stesso"
1 è l'estensione del concetto "uguale a 0"- e segue immediatamente 0 nella serie dei numeri naturali ove "*n* segue immediatamente *m*" se esiste un concetto *F* e un oggetto *x* che vi cade sotto e tale che *n* sia il numero di *F* e il numero che si applica al concetto "che cade sotto *F* ma non identico *x*" è *m*.

Definito lo 0, l e, in generale il successore immediato di un numero qualsiais *n* Frege procede a dimostrare alcuni teoremi dell'aritmetica servendosi delle definizioni logiche da questi introdotte.

Identificato con l'estensione di un concetto il numero allora resta ridotto ad una nozione logica (Russell parlerà del numero come la classe di tutte le classi che possono essere poste tra loro in corrispondenza biunivoca).

---

[3] Frege non faceva riferimento ad alcuna versione formale dell'aritmetica nel tentare di ridurre l'aritmetica alla logica. Si può anzi dire che tale tentativo contribuì alla formalizzazione stessa dell'aritmetica, della quale più assiomatizzazioni furono proposte sul finire dell'Ottocento e all'inizio del Novecento. Si ricordino quelle di R. Dedekind (*Was sind und was sollen die Zahlen*, 1888) e G. Peano (*Arithmetices Principia, nova methodo exposita,* 1889; *Formulario matematico*, 1898).
[4] Ove il fatto che essi non abbiano una collocazione spazio-temporale né possano essere immaginati nulla toglie al loro essere oggetti (*Nicht jeder objektive Gegenstand hat einen Ort*. Non ogni oggetto oggettivo ha un luogo).

Si noti che tale riduzione del numero ad una nozione logica non ha per Frege il senso di una dissoluzione dell'aritmetica in un discorso tautologico e per questo sempre vero ma ha il valore

- di una giustificazione della fondamentalità dell'aritmetica stessa, ché mostrerebbe il suo essere esprimibile nei termini della logica ovvero della teoria pura degli oggetti e dei concetti che, data la sua generalità, è la più fondamentale tra le teorie filosofiche che si possono formulare.[5]
- di un'eliminazione di ogni riferimento, in aritmetica, all'intuitizione intesa come esperienza di tipo empirico e, quindi, incapace di conferire carattere necessario all'aritmetica (che, invece, ridotta alla logica resta caratterizzata per Frege come analitica-a-priori).

Si sa che la logica nei cui termini Frege credette di poter ridurre l'aritmetica si rivelò contraddittoria (la contraddizione fu scoperta da Russel, che la comunicò a Frege nel 1902), il che inaugurò la cosiddetta *crisi dei fondamenti*,[6] che portò non al tramonto ma alla riformulazione del programma iniziato da Frege a cui si dà il nome di *logicismo*.

Contrariamente a Frege, invece, Brouwer non propose alcuna riduzione della nozione di numero naturale a qualcosa d'altro. Egli riguardò, infatti, la nozione di numero naturale come un originario, astrazione che muove dalla percezione dello scorrere del tempo, intesa come un'esperienza interiore originaria dell'essere umano, il "fenomeno fondamentale" (*Ur-phaenomen*) dell'intelletto umano. Tale percezione si realizzerebbe cogliendo in se stessi lo scemare dell'adesso nel già stato all'avvento di un nuovo adesso ovvero «lo scomporsi di un momento della vita in due parti qualitativamente distinte ove l'una confluisce nell'altra, pur senza perdersi in essa, ché conservata nel ricordo» (Brouwer [1912]). Il fenomeno fondamentale dell'intelletto umano starebbe alla base dell'intuizione della forma uno-due o biunità, colta in essa *via abstractionis*. Tale intuizione è l'*Urintuition* da cui procede la matematica tutta: da essa deriverebbero «non solo i numeri uno e due, ma tutti i numeri ordinali finiti, nella misura in cui uno degli elementi della bi-unità può essere inteso come una nuova bi-unità, processo che può essere a sua volta ripetuto indefinitamente» (Brouwer [1912]). Non diversamente che nel caso di Frege, la filosofia di Brouwer filia nuova pratica matematica, di impronta, però, fortemente revisionistica. Ché, non diversamente dal suo momento originario, la pratica della matematica viene pensata da Brouwer come intuitiva ovvero come un costruire mentale trasparente a se stesso, a cui, come tale, si richiede di seguire una logica diversa da quella classica, ché alcune operazioni codificate nei termini della logica classica non avrebbero il carattere di richiede ad un costruire mentale effettivo.[7] Così la matematica intuizionista si configura come un matematica diversa da quella classica che non esita a rigettare risultati validi classicamente o a proporre per essi provepiù complicate di quelle classiche.

Anche i contributi filosofici di Hilbert si trovano intrecciati, sia prima che dopo il 1922, ad un grandioso programma tecnico noto come *programma hilbertiano*. Con esso Hilbert riteneva di poter giustificare la legittimità dell'uso di procedure classiche in matematica, anche se non immediatamente evidenti, ponendo la consistenza come condizione necessaria e sufficiente di legittimità matematica e mostrando come le procedure classiche fossero in grado di dare origine a teorie non contraddittorie. La centralità matematica dell'aritmetica, alla cui constatazione la matematica ottocentesca aveva condotto, resta riaffermata e reinterpretata, per così dire, entro il programma di Hilbert, ché questo intese sottoporre a formalizzazione tutte le teorie matematiche del tempo onde indagarne poi la consistenza. Nel fare ciò Hilbert prese le mosse dalla teoria matematica fondamentale ovvero dall'aritmetica e dalla questione dela sua consistenza.

Che cosa vuol dire formalizzare una teoria matematica? Presentarla come un sistema in cui sono esplicitati il linguaggio usato (alfabeto e regole di formazione di termini), i termini primitivi della teoria e i suoi assiomi e le regole logiche con cui si ottengono i teoremi dagli assiomi. Quanto alla questione della non-

[5] Si considerino le conclusioni di Frege (1884), ove l'autore polemizza con una certa nozione di analiticità (=tautologicità) che egli considera di derivazione kantiana. Per Frege, i teoremi della matematica sono, sì, analitici perché deducibili dagli assiomi ma stanno negli assiomi "come la pianta sta nel seme e non come la trave si trova nel tetto" (cfr. Frege 1884, in Benacceraf-Putnam, *op. cit.*, 154).

[6] L'espressione è usata per la prima volta da H. Weyl nel 1921 (cfr. Weyl H., "Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik", *Mathematische Zeitschrift* 10 (1921), 39-79).

[7] Si pensi alla regola del terzo escluso "a *vel* $\neg a$" che consente classicamente di affermare a sulla base della confutazione di $\neg a$ (ovvero $\neg\neg a = a$). Per l'intuizionista asserire/negare una verità matematica significa disporre una costruzione intuitivamente evidente che funga prova/confutazione di quanto asserito. Così, asserire $\neg\neg a$ equivale ad affermare di disporre di una confutazione per l'enunciato $\neg a$, il che non significa *eo ipso* disporre di una prova per a. Quindi intuizionisticamente non è sempre vero che $\neg\neg a = a$ (Cfr. H. Heyting, "The Intuitionist Foundation of Mathematics" in Benacerraf-Putnam, *op. cit.*, 52-60).

contraddittorietà dell'aritmetica, Hilbert credette di poter individuare entro la stessa un nucleo dai contenuti immediatamente evidenti e dalle operazioni immediatamente garantite nella loro affidabilità. Si tratta dell'*aritmetica finitaria* ovvero dell'aritmetica in quanto tratta di quantità finite senza supporre il riferimento a quantità infinite attualmente date, ad esempio alla totalità dei numeri naturali. L'aritmetica finitaria sarebbe sicura sia nei suoi contenuti che nei suoi metodi, per Hilbert, perchè la materia di cui essa tratta e i suoi procedimenti sarebbero intuitivi (*anschaulich*)[8] ovvero tali da poter essere, almeno in linea di principio, esibiti nei termini di segni (come |, ||, |||, …) e verificati attraverso operazioni o "esperimenti mentali" su tali segni.[9] Quanto all'aritmetica non finitaria, Hilbert avrebbe voluto caratterizzare quest'ultima come una semplice estensione (conservativa e non contraddittoria) della prima, dimostrandone la non contraddittorietà attraverso operazioni affidabili al pari delle operazioni dell'aritmetica finitaria. Hilbert ritiene che questo sia possibile perché riduce la dimostrazione della non contraddittorietà di una teoria assiomatica come l'aritmetica alla dimostrazione che una formula falsa, ad es. 0 = 1, non può essere formalmente derivata dal sistema di assiomi in questione. Ora quest'ultimo consta di un numero finito di assiomi formulati con un numero fnito di simboli. Analogamente le regole della logica usate nella formalizzazione della teoria sono finite (finite di numero e formulate con un numero fnito di simboli). Con ciò mostrare che la formula 0 = 1 non può essere provata a partire dagli assiomi della teoria usando le regole del calcolo in cui essa è formalizzata appare un compito analogo alle operazioni dell'aritmetica finitaria, ovvero una manipolazione finita di figure finite di simboli. Si noti che in tale dimostrazione di non contraddittorietà gli oggetti di indagine sono le dimotsrazioni del sistema formale e non enti matematici, l'indagine è di tipo non matematico ma metamatematico.
Si sa che K. Gödel nel 1931 dimostrò essere intrinsecamente impossibile provare la consistenza dell'aritmetica utilizzando le procedure dimostrative dell'aritmetica finitaria. Il secondo teorema di Gödel, al pari del paradosso di Russell, aprì problemi fondazionali all'ordine del giorno oggi in filosofia della matematica relative al signifcato dei teoremi stessi nonché alla natura dell'implicita assunzione di consistenza che si fa quando si lavora in una teoria matematica ove si sa che di tale consistenza una prova non può essere data se non utilizzando strumenti che sono più complicati della teoria stessa. Non diversamente dal paradosso di Russell, comunque, anche il teorema di Gödel non portò al tramonto bensì alla riformulazione del programma hilbertiano (oggi continuato col nome di *proof theory*). Si noti che nel contesto del programma hilbertiano condizione di legittimità di una teoria matematica non è il suo essere vera (corrispondere ad una realtà matematica esistente indipendentemente dal matematico) ma essere consistente secondo il motto hilbertiano "la coerenza implica l'esistenza" o, altrimenti, la verità della matematica non è assoluta ma realtiva all'accettazione di certi canoni procedurali.

[8] *Anschauung* è il termine usato da Kant a indicare l'intuizione spazio-temporale.
[9] Tali segni non pare siano da intendersi come oggetti fisici chè sono sempre estendibili e la loro forma può essere da noi riconosciuta indipendentemente dallo spazio e dal tempo, dalle particolari condizioni di produzione del segno, da differenze nei segni prodotti (ad esempio '|||' e '…' istanziano lo stesso segno). Sono *oggetti formali*, generati ricorsivamente, di cui le stringhe di bastocini e i puntini sono rappresentazioni [Cfr. D. Hilbert, P. Bernays (1934-9), *Grundlagen der Mathematik*, 2 voll, Springer Verlag, Berlin].