Seminario di Filosofia e Storia della Matematica
a cura dei Dottorandi in Filosofia della Scienza
dell'Università di Genova
A.A. 2001-2002

L'INFINITO

Programma Provvisorio

Martedì 26 marzo 2002, ore 10.00-13.00
L'infinito nella cosmologia:
da Giordano Bruno al multiverso
coordinatori: Massimiliano Badino (badino@libero.it),
Mario Bramé (bramario@libero.it)

Martedì 7 maggio 2002, ore 10.00-13.00
Infinito, infinitesimo e continuo
coordinatori: Paola Cantù (paocantu@libero.it),
Andrea Pedeferri (andreapede@tiscalinet.it)

Martedì 21 maggio 2002, ore 10.00-13.00
L'infinito nella teoria degli insiemi
coordinatori: Roberto Arpaia (robertoarpaia@tin.it),
Tatiana Arrigoni (arrigonitatiana@hotmail.com)

Al seminario sono invitati studenti e dottorandi dell'Università di Genova e tutti gli interessati. Ciascun incontro seminariale prevede una relazione tenuta dal coordinatore e altri interventi. Chi intende partecipare attivamente al seminario (con una relazione o con una presentazione di alcuni dei testi indicati in bibliografia) è pregato di contattare i coordinatori oppure di chiedere informazioni al Prof. Dario Palladino. Oltre ai testi bibliografici relativi a ciascun incontro sono indicate alcune letture consigliate a chi avesse scarsa familiarità con i temi trattati nel seminario. Per informazioni, scrivere a paocantu@libero.it.

26 marzo 2002 - L'INFINITO NELLA COSMOLOGIA: DA GIORDANO BRUNO AL MULTIVERSO

L'universo è infinito? Questa domanda semplice e feconda ha influenzato la riflessione cosmologica fin dalle epoche più remote. Nel corso dei secoli si sono sviluppate diverse teorie che hanno, di volta in volta, spostato l'attenzione sulle diverse componenti del pensiero "imparentate" con la cosmologia: la metafisica, la teologia, la cosmogonia, la fisica. Dalla concezione del "mondo pieno" parmenideo, alla rappresentazione sferica del cosmo in Aristotele. Dall'universo "sperimentalmente" infinito di Giordano Bruno alle prospettive aperte dalla Relatività Generale di Einstein. Un percorso a tappe che ha contemplato, nel suo corso, di pari passo, la rivisitazione dei concetti fondamentali dell'indagine fisica: spazio, tempo, massa, energia, astrazione geometrica. Un percorso che ha introdotto nuovi significati del termine "infinito" e che ha, tuttavia, mantenuto inalterata la validità ontologica della domanda fondamentale della filosofia: "perché qualcosa piuttosto che il nulla?" La cosmologia è una scienza particolare, dal punto di vista metodologico più vicina alla biologia che alla fisica o alla chimica di cui comunque utilizza a piene mani i risultati. Nella presente discussione (che si propone come un parziale excursus sul concetto di infinito all'interno della cosmologia) verrà dapprima illustrato il problema dell'infinità dell'universo all'interno del pensiero di Giordano Bruno, dopodiché verranno riassunti i principali aspetti della "rivoluzione relativistica" all'interno della fisica, ne verranno illustrati i caratteri salienti e verranno forniti gli strumenti concettuali necessari a comprendere lo sviluppo successivo della discussione. In seguito verranno proposti i principali risultati del modello cosmologico standard. Esso consiste essenzialmente nella assunzione del Principio Cosmologico (isotropia ed omogeneità dell'universo) e nella definizione dei moti inerziali come insieme di moti naturali. Ciò consente di applicare la relatività generale su scala cosmologica e di trarre importanti conseguenze sulla geometria dell'universo e sul suo destino evolutivo. Verranno pertanto esaminate le equazioni cosmologiche e i possibili esiti dell'evoluzione cosmica. Inoltre si terrà conto di recenti risultati, ad esempio i dati relativi alle supernove lontane, che suggeriscono la presenza di una costante cosmologica non nulla. La costante cosmologica è un termine aggiuntivo alle equazioni cosmologiche, di difficile interpretazione fisica, e che Einstein introdusse al fine di garantire la staticità dell'universo. Successivamente rinnegata, è ora tornata prepotentemente in auge al fine di spiegare osservazioni altrimenti problematiche. La sua presenza, che deve essere interpretata come una forma di energia repulsiva associata allo spazio vuoto, complica notevolmente le possibili evoluzioni cosmiche, intersecando fra loro diversi esiti. Ma il tema dell'infinito in cosmologia non riguarda soltanto la possibile, infinita durata dell'universo, ma anche la questione, metodologicamente fondamentale, delle condizioni iniziali. La cosmologia si trova davanti ad una domanda genuinamente metafisica: perché esiste proprio questo universo? Verranno analizzate possibili soluzioni a questo problema fra cui il celebre Principio Antropico e la teoria fisica del multiverso. Contestualmente alle più recenti teorie inflazionarie dell'origine dell'universo, si è infatti presentata la possibilità che il nostro sia uno dei possibili universi, finiti in estensione, ma infiniti in numero. Tale eventualità reintrodurrebbe in cosmologia quella arbitrarietà delle condizioni iniziali che è conquista metodologica essenziale della rivoluzione scientifica galileana-newtoniana.

Bibliografia

A) Massimiliano Badino (Genova): 1) C.J. Hogan, R.P. Kirshner, N.B. Suntzeff, "Il mistero delle supernove lontane", 367, *Le Scienze*, marzo 1999, 40-45. 2) L. M. Krauss, "L'antigravità cosmologica", 367, *Le Scienze*, marzo 1999, 46-53. 3) M.A. Bucher, D.N.

Spergel, "L'inflazione in un universo a bassa densità", 367, *Le Scienze*, marzo 1999, 54-61. 4) M. Rees, "Esplorare il nostro e altri universi", 376, *Le Scienze*, dicembre 1999, 58-64. 5) N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, G. Dvali, "Le dimensioni invisibili dell'universo", 386, *Le Scienze*, ottobre 2000, 80-88. 6) R.R. Caldwell, M. Kamionkowski, "Echi del Big-Bang", 391, *Le Scienze*, marzo 2001, 36-40. 7) J.P. Ostriker, P.J. Steinhardt, "La quinta forza dell'universo", 391, *Le Scienze*, marzo 2001, 44-51. 8) P.J. E. Peebles, "Trovare un senso nella cosmologia moderna", 391, *Le Scienze*, marzo 2001, 52-53. 9) E. Agazzi, *Filosofia della natura. Scienza e cosmologia*, Piemme, Casale Monferrato, 1995.

B) Mario Bramé (Genova): 1) G. Bruno, *De linfinito, universo e mondi.* 2) G. Boniolo e M. Dorato, "Dalla relatività galileiana alla relatività generale", in G. Boniolo (a cura di), *Filosofia della fisica*, Bruno Mondadori, Milano 1997, pp. 7-167. 3) A. Einstein, R*elatività: esposizione divulgativa e scritti su Spazio Geometria Fisica*, Bollati Boringhieri, Torino 1967. 4) B.Riemann, *Sulle ipotesi che stanno alla base della geometria*, Bollati Boringhieri, Torino 1994. 5) M.Rees, *Prima dellinizio*, Cortina, Milano 1998. 6) E. Mach, *La meccanica nel suo sviluppo storico-critico*, Bollati Boringhieri, Torino 1992. (pp. 206-290) 7) F.de Felice, *Gli incerti confini del cosmo*, Bruno Mondadori, Milano 2000.

---

7 maggio 2002 - INFINITO, INFINITESIMO E CONTINUO

A) Paola Cantù (Genova): "Il continuo non-archimedeo di Giuseppe Veronese" Dopo l'introduzione ad opera di Cantor dell'infinito attuale, Giuseppe Veronese infrange nel 1891 un altro tabù filosofico costruendo un continuo non archimedeo che contiene grandezze infinite e infinitesime attuali. Veronese studia le proprietà del continuo intuitivo per mostrare che esse sono compatibili con l'esistenza di infinitesimi attuali tanto quanto con la loro non esistenza. Rifiutando l'idea di Dedekind di considerare la continuità dei numeri reali come una descrizione adeguata del continuo intuitivo, Veronese costruisce un continuo geometrico indipendente dalle coordinate e solo successivamente assegna dei nuovi numeri ai suoi elementi. Con questo procedimento sintetico Veronese mostra che l'impossibilità dell'esistenza degli infinitesimi attuali espressa dal principio di Archimede (date due grandezze una è sempre multipla dell'altra) è una conseguenza del postulato di Dedekind, ma non di altre formulazioni del principio di continuità. Rispondendo alle obiezioni di Cantor, Vivanti e Peano, Veronese dimostra la dipendenza logica tra il postulato di Dedekind e il principio di Archimede. Poiché i numeri reali sono archimedei, ogni tentativo di fondare la continuità geometrica sulla continuità analitica è incompatibile con l'esistenza di grandezze infinitesime attuali. Se al contrario si attribuisce al continuo geometrico il compito di descrivere il continuo intuitivo sensibile e si adotta un metodo sintetico anziché presupporre le proprietà del continuo dei numeri reali, una forma di collegamento continuo tra le parti può sussistere anche tra grandezze non archimedee.

Bibliografia: 1) R. Dedekind, *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, Braunschweig, Vieweg & Sohn, 1872, trad. it. a cura di T. Gana in R. Dedekind, *Scritti sui fondamenti della matematica*, Napoli, Bibliopolis, 1982, pp. 63-78. 2) G. Cantor, "Grundlagen einer Mannigfaltigkeitslehre", *Mathematische Annalen*, 21 (1883), pp. 545-586, tr. it. a cura di G. Rigamonti in G. Cantor, *La formazione della teoria degli insiemi*, pp. 77-134. In particolare si vedano i paragrafi 4-8, pp. 85-100 e l'inizio del paragrafo 10, pp. 108-110. 3) D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*, Stuttgart, Teubner, 1899, tr.it. di Pietro Canetta, *Fondamenti della geometria*, con i supplementi di Paul Bernays, Milano, Feltrinelli, 1970, paragrafo 12: "L'indipendenza degli assiomi di continuità V (geometria non archimedea)", pp. 48-51. 4) G. Veronese, pagine scelte

---

B) Andrea Pedeferri (Milano): "Una nuova visione dell'infinito e dell'infinitesimo: l'Analisi non standard di A. Robinson" Si analizzeranno alcuni aspetti dell'analisi non standard:

(1) da un punto di vista storico si vedrà come la teoria degli infinitesimi leibniziana a causa di una mancante teoria logica di base e, perciò, di una sua coerenza semantica abbia indirizzato il calcolo verso la sicurezza garantita dalla teoria dei limiti;
(2) da un punto di vista più "tecnico" si vedrà come Robinson con l'analisi non standard riesca a "vendicare" l'intuizione leibniziana costruendo un'analisi basata proprio sugli infinitesimi: si introdurranno quindi alcuni concetti teorici base della teoria dei modelli, si vedrà come "nascono" questi infinitesimi e si mostrerà qualche esempio del loro utilizzo;
(3) si farà una riflessione più filosofica sull'atteggiamento "neo formalista" di Robinson verso le entità matematiche.

Bibliografia:1) Sani, *Infinito*, La Nuova Italia, Firenze, 1998. 2) A. Robinson, "Formalism 64", in *Proc. Internat. Congress for Logic, Methodology on Philos. Sci., Jerusalem 1964*, North Holland, Amsterdam, 1965. 3) J. Petitot, "Infinitesimale", in *Enciclopedia Einaudi*, vol. VII, Einaudi, Torino, 1977.

---

21 maggio 2002 - L'INFINITO NELLA TEORIA DEGLI INSIEMI

A) Roberto Arpaia (Genova): "Lo statuto dell'assioma dell'infinito: dalla 'freie Schöpfung' di Dedekind ai 'Mengenbereiche' di Zermelo" Oggetto precipuo della teoria degli insiemi fu, sin dal suo apparire, lo studio dell'infinito "attuale" della matematica. Se però Cantor, e dopo di lui Zermelo, Skolem, Fraenkel e von Neumann, assumevano l'esistenza di una gerarchia di insiemi infiniti senza dare una dimostrazione dell'esistenza di un tale insieme, e quindi adottando una posizione platonistica riguardo all'ontologia degli oggetti matematici, diversa fu la posizione di Dedekind, che nel saggio *Was sind un was sollen die Zahlen* propose una dimostrazione dell'esistenza del sistema dei numeri naturali, sistema che secondo lui ha origine da un atto di libera creazione (*freie Schöpfung*) della mente umana. Nel corso della discussione verranno analizzate le differenze ed i presupposti filosofici delle due posizioni, soffermandoci su alcuni esempi paradigmatici tratti dai testi di Dedekind e da quelli di matematici piú vicini all'impostazione di Cantor, quali *Über Grenzzahlen und Mengenbereiche* di Zermelo, in cui la gerarchia transfinita è introdotta per la prima volta in un sistema assiomatico.

Bibliografia: 1) Cantor G., passi scelti; 2) Casari E., *Questioni di filosofia della matematica*, Milano, 1964; 3) Dedekind R., *Was Sind und Was Sollen die Zahlen*, 1888; 4) McCarty D., "The mysteries of Richard Dedekind" , in J.Hintikka (ed), *From Dedekind to Gödel : essays on the development of the foundations of mathematics*, Dordrecht, 1995; 5) Zermelo E., "Über Grenzzahlen und Mengenbereiche", *Fundamenta Mathematicae*, 1930.

B) Tatiana Arrigoni (Genova) La teoria degli insiemi si caratterizza, a partire dalla sua formulazione informale da parte di Cantor, per la pretesa di trattare di grandezze infinite, di definire operazioni su di esse e di dimostrarne proprietà. Nella prima formulazione assiomatica della teoria degli insiemi (Zermelo 1908), è uno specifico assioma (das Unendlichkeitsaxiom) ad asserire l'esistenza di un insieme infinito, ad esempio uno che soddisfa tutti gli altri assiomi della teoria di Zermelo e contiene tutte le potenze successive di un insieme finito. Tale assioma può essere formulato come segue: $\exists x(\emptyset \in x \wedge \forall y(y \in x \rightarrow y \cup \{y\} \in x)$. L'esistenza della potenza di un insieme, ovvero dell'insieme costituito da tutti i suoi sottoinsiemi, è garantita a sua volta da un altro assioma specifico, l'assioma dell'insieme potenza (das Potenzmengeaxiom). Assioma dell'infinito e assioma dell'insieme potenza rendono possibile una distinzione tra infiniti di taglia differente. L'assioma di infinito garantisce infatti l'esistenza di un insieme infinito $\mathbb{N}$ che soddisfa la struttura dei numeri naturali. È tuttavia possibile formare a partire da N, l'insieme potenza di $\mathbb{N}$, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, il quale si dimostra facilmente non potere essere messo in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{N}$ ovvero essere "più grande" di N e non numerabile ($\mathcal{P}(\mathbb{N})$ è designato da $\mathbb{R}$, in quanto soddisfa la struttura dei numeri reali). Intento del presente intervento è considerare come una volta caratterizzato il concetto di insieme in questa maniera il processo di generazione di insiemi infiniti di taglia progressivamente più grande non abbia potenzialmente fine. In questione è naturalmente il significato matematico e filosofico dell'assunzione di esistenza di insiemi infiniti di taglia sempre più grande. A tal proposito si accennerà brevemente ad alcuni dei cosiddetti assiomi dell'infinito (esistenza di cardinali inaccessibili, compatti, misurabili), accennando ai risultati matematici che essi permettono di provare e alle considerazioni generali addotte da parte dei loro sostenitori.

Bibliografia: 1) Boolos G. [1998],"Must we believe in set Theory?" in Boolos [1988], *Logic, Logic and Logic*, Harvard University Press, Cambridge (Ma.), pp. 120-132. 2) Feferman S. [1987], "Is Cantor Necessary?", in Feferman S. [1998], *In the Light of Logic*, Oxford University Press, Oxford, New York. 3) Kanamori A. [1994], T*he higher Infinite*, Springer Berlin. 4) Maddy P, [1988], "Believing the axioms I", in *The Journal of Symbolic Logic*, Volume 53, Numero 2. 5) Maddy P, [1988], "Believing the axioms II", in *The Journal of Symbolic Logic*, Volume 53, Numero 3.

Indicazioni bibliografiche ausiliarie

Per chi avesse scarsa familiarità con i concetti di numero reale, continuità e infinitesimo si consiglia la lettura ausiliaria di alcuni capitoli tratti dai seguenti testi (alcuni dei quali saranno disponibili in fotocopia nell'ufficio del Prof. Palladino):

(1) *Numeri reali*: C. Mangione, S. Bozzi, *Storia della logica. Da Boole ai nostri giorni*, Milano, Garzanti, 1993, cap. 3, paragrafi 1-2: "L'aritmetizzazione dell'analisi e i suoi sviluppi", pp. 261-332
(2) *Continuo*: L. Geymonat, *Storia e filosofia dell'analisi infinitesimale*, Torino, Levrotto Bella, 1948, capitolo XIX: "Continuo atomistico e continuo geometrico", pp. 266-277
(3) *Infinito*: C. Mangione, S. Bozzi, *Storia della logica. Da Boole ai nostri giorni*, Milano, Garzanti, 1993, cap. 3, paragrafo 3: "La teoria degli insiemi cantoriana", pp. 302-331
(4) *Infinitesimo*: 1) P. Zellini, *Breve storia dell'infinito*, Milano, Adelphi, 1990, cap. XI "L'infinito attuale. Indefinito e transfinito", pp. 185-212. 2) P. Cantù, *Giuseppe Veronese e i fondamenti della geometria*, Milano, Unicopli, 1999, capitolo 2, paragrafo 4: "L'infinitesimo attuale", pp. 131-148
(5) *Analisi non-standard*: M. Davis e R. Hersh, "L'analisi non standard", in *Le Scienze*, *Quaderni*, n. 60 (giugno 91), pp. 52-59, ristampato anche nel n. 92 (ottobre 96), pp 81-88
(6) E. Casari, *Questioni di filosofia della matematica*, Fetrinelli, Milano, 1964.

Per chi avesse scarsa familiarità con la teoria della relatività generale, la cosmologia e la teoria dell'inflazione si consiglia la lettura ausiliaria di alcuni dei seguenti testi (alcuni dei quali saranno disponibili in fotocopia nell'ufficio del Prof. Palladino):

(1) *Relatività Generale*: 1) G. Boniolo, M. Dorato, "Dalla relatività galileana alla relatività generale" in G. Boniolo (a cura di) *Filosofia della fisica*, B. Mondadori, Milano, 1997, pp. 6-167. 2) A. Einstein, "Relatività: esposizione divulgativa", in A. Einstein, *Opere scelte*, Bollati-Boringhieri, Torino, 1988, pp. 389-504. 3) P.J.E. Peebles, *Principles of Physical Cosmology*, Princeton University Press, Princeton, 1993, pp. 227-298.

(2) *Cosmologia*: 1) S. Bergia, "Problemi fondazionali e metodologici in cosmologia", in G. Boniolo (a cura di) *Filosofia della fisica*, B. Mondadori, Milano, 1997, pp. 169-244. 2) J. B. Zeldovic, I. D. Novikov, *Struttura ed evoluzione dell'Universo* (primo vol.), Editori Riuniti, Roma, 1991, pp. 10-60 e 140-150. 3) P.J.E. Peebles, *Principles of Physical Cosmology*, Princeton University Press, Princeton, 1993, pp. 3-131.

(3) *Teoria dell'inflazione*: P.J.E. Peebles, *Principles of Physical Cosmology*, Princeton University Press, Princeton, 1993, pp. 361-457.