10. Credenze esplicite e mondi non classici
10.1 La logica della credenza esplicita ed implicita di Levesque

Dati i limiti e i problemi posti dai trattamenti sintattici della credenza, Levesque (1984) propose un trattamento di tipo "semantico" per la logica del credere, in cui il problema dell'onniscienza logica fosse affrontato utilizzando, anziché i mondi possibili classici della semantica di Kripke, strutture semantiche di tipo non classico. Abbiamo visto nel par. 8.2 che il problema dell'onniscienza logica nelle logiche epistemiche basate sulla semantica di Kripke è legato al fatto che ogni mondo possibile deve essere coerente (deve cioè assegnare al più un valore di verità a ciascuna formula primitiva) e completo (deve cioè assegnare almeno un valore di verità a ciascuna formula primitiva). La soluzione proposta da Levesque consiste nel sostituire ai mondi della semantica kripkeana entità semantiche che possano eventualmente essere incomplete (che cioè non assegnino alcun valore di verità ad alcune delle formule primitive del linguaggio) e/o incoerenti (che cioè assegnino entrambi i valori di verità ad alcune delle formule primitive). Utilizzando la terminologia di Barwise e Perry (1983), Levesque chiama tali strutture semantiche *situazioni* (*situations*)[1]. L'idea intuitiva che motiva l'utilizzo di situazioni *incomplete* consiste nel fatto che le situazioni dovrebbero modellare la parte di realtà che si ritiene rilevante rispetto alle credenze di un soggetto epistemico, lasciando indeterminato tutto il resto. "Si consideri - dice Levesque - la situazione in cui io siedo al mio terminale al lavoro. Potremmo dire che questa situazione giustifica il fatto che io sono al lavoro, che qualcuno è al mio terminale, che c'è un libro oppure un terminale sulla mia scrivania, e così via. D'altro canto, essa non motiva l'opinione che mia moglie è a casa, che non è fuori a fare acquisti, e neppure l'opinione che essa è oppure non è a casa. Benché quest'ultimo fatto sia certamente *vero*, io che siedo al mio terminale non ha nulla a che fare con tutto ciò" (Levesque 1984a, p. 199). L'uso di situazioni *incoerenti* viene motivato sulla base del fatto che un soggetto epistemico può avere concezioni o informazioni sbagliate che lo portano a ritenere possibili stati di cose che di fatto non lo sono.

Come vedremo, l'uso di situazioni anziché di mondi possibili consente di elaborare modelli del ragionamento epistemico in cui le credenze di un attore epistemico non siano logicamente chiuse rispetto alla conseguenza logica classica. Tuttavia Levesque propone di mantenere nella logica da lui proposta anche il concetto di credenza tipico delle logiche epistemiche tradizionali (che implica appunto la chiusura deduttiva rispetto all'implicazione classica), distinguendo due modi diversi di caratterizzare la credenza. Secondo Levesque non è produttivo considerare l'onniscienza logica come un'idealizzazione delle capacità inferenziali di un soggetto razionale. Le logiche epistemiche tradizionali modellerebbero piuttosto quella che Levesque chiama *credenza implicita* (*implicit belief*)[2]. La credenza implicita ha a che fare con tutto ciò che è implicito in ciò che di fatto è creduto da un soggetto. In altri termini, dal punto di vista delle credenza implicita si prende in considerazione "non ciò che un agente crede direttamente, ma *cosa sarebbe il mondo se ciò che egli crede fosse vero*" (p. 198). Così, se è creduta α, e α implica logicamente β, allora è creduta implicitamente anche β, in quanto non sarebbe possibile un mondo in cui sia vera α e falsa β. E' quindi corretto che la credenza implicita sia chiusa rispetto alla conseguenza logica. Viceversa, il problema dell'onniscienza logica si pone rispetto alle credenze effettive di un soggetto epistemico. Tutto ciò che un soggetto epistemico ritiene effettivamente vero (oppure, potremmo dire, tutte quelle credenze che hanno un potenziale riscontro sul suo comportamento) è detto da Levesque una *credenza esplicita* (*explicit belief*).

La logica che Levesque propone è una *logica della credenza implicita ed esplicita*, che consente di prendere in considerazione contemporaneamente i due tipi di credenza. Il linguaggio di tale logica comprende quindi due operatori modali distinti, uno per la credenza implicita ed uno per la credenza esplicita, che indicheremo rispettivamente con i simboli B ed E[3].

Levesque ha formulato originariamente la logica della credenza implicita ed esplicita in maniera da non ammettere modalità iterate. Il linguaggio della logica della credenza implicita ed esplicita è dunque il seguente. L'*alfabeto* è lo stesso dei sistemi del par. 8.2, con in più l'operatore modale E per la credenza esplicita. L'insieme delle *formule ben formate* è definito come il più piccolo insieme tale che:

i. ogni lettera proposizionale è una formula;
ii. se α è una formula, allora $(\neg \alpha)$ è una formula;

---

[1]Si noti tuttavia che la *situations semantics* ha, in generale, poco a che fare con le logiche che esamineremo in questo capitolo. L'analogia non va oltre il fatto che in entrambi i casi le situazioni rappresentano stati di cose parziali.

[2]Sul fatto che le logiche epistemiche tradizionali possono essere viste come logiche della credenza implicita si veda ad esempio (Lenzen 1978). Un'analisi dei concetti di conoscenza implicita ed esplicita viene affrontata in (Stalnaker 1991), il quale, ad esempio, analizza diverse motivazioni in base alle quali accettare l'idealizzazione della conoscenza implicita.

[3]Questa scelta notazionale è dovuta a ragioni di comodità. Come vedremo infatti l'operatore per la credenza implicita si comporta in maniera analoga all'operatore B delle logiche epistemiche viste nel par. 8.2. La notazione di Levesque è diversa: egli utilizza B per la credenza esplicita e adotta come operatore di credenza implicita il simbolo L, solitamente utilizzato in logica come operatore modale aletico di necessità.

iii. se α e β sono formule, allora $(\alpha \wedge \beta)$ è una formula;
iv. se α è una formula che non contiene alcuna occorrenza di B o di E , allora $(B\alpha)$ e $(E\alpha)$ sono formule.

Per quanto riguarda l'uso delle parentesi e la definizione degli altri operatori verofunzionali, assumiamo che valgano le stesse convenzioni del par. 8.2.

Vediamo ora la semantica per la logica di Levesque. Definiamo un'interpretazione M per la logica della credenza implicita ed esplicita come una terna $M = (S, \mathbf{B}, \varphi)$, dove S è l'insieme di tutte le situazioni, **B** è l'insieme delle situazioni compatibili con ciò che è creduto dal soggetto epistemico[4], e φ è una funzione interpretazione a due argomenti che, per ogni situazione s, assegna i valori di verità alle formule primitive del linguaggio. Si noti che, a differenza di quanto avviene nelle strutture di Kripke (cfr. par. 8.2), i valori di φ non possono essere singoli valori di verità, ma devono essere sottoinsiemi dell'insieme $\{\mathbf{v}, \mathbf{f}\}$. Questo è dovuto al fatto che le situazioni, a differenza dei mondi, possono essere incoerenti o incomplete, così che, data una situazione $s \in S$ e una formula primitiva α, vi sono casi in cui φ deve poter associare come valore all'argomento $[s, \alpha]$ una coppia di valori di verità, oppure nessun valore di verità. Così, ad esempio, se α è vera nella situazione s si avrà $\varphi[s, \alpha] = \{\mathbf{v}\}$, se α è sia vera che falsa in s si avrà che $\varphi[s, \alpha] = \{\mathbf{v}, \mathbf{f}\}$, se α non è né vera né falsa in s si avrà che $\varphi[s, \alpha] = \varnothing$. Così, se $\mathbf{\Phi}$ è l'insieme delle formule primitive, φ è una funzione di tipo φ: $S \times \Phi \rightarrow 2^{\{\mathbf{v},\mathbf{f}\}}$.

E' chiaro che i mondi possibili classici utilizzati nelle strutture di Kripke sono casi particolari delle situazioni della presente semantica. Diremo quindi che una situazione $s \in S$ è un *mondo* se e soltanto se, per ogni formula primitiva α del linguaggio, si ha che $\varphi[s,\alpha]$ è uguale a $\{\mathbf{v}\}$ oppure a $\{\mathbf{f}\}$. Sono mondi cioè tutte le situazioni che siano coerenti e complete. Definiamo ora l'insieme $W(s)$ dei mondi *compatibili* con una situazione s in un'interpretazione M:

$W(s) = \{w \in S \mid$
a) w è un mondo;
e, per ogni formula atomica α del linguaggio:
b) se $\mathbf{v} \in \varphi[s,\alpha]$, allora $\mathbf{v} \in \varphi[w,\alpha]$;
c) se $\mathbf{f} \in \varphi[s,\alpha]$, allora $\mathbf{f} \in \varphi[w,\alpha]\}$.

$W(s)$ è dunque l'insieme di tutti i mondi che concordano con s dove s è definita (o, in altri termini, l'insieme dei mondi che "completano" la situazione s in tutte le maniere possibili). Si noti che, se s è una situazione incoerente, allora nessun mondo possibile è compatibile con s, cioè $W(s) = \varnothing$ (infatti, se s è incoerente, allora, per qualche α, si dovrà avere $\varphi[s,\alpha] = \{\mathbf{v}, \mathbf{f}\}$; in tal caso, per ogni $w \in W(s)$, si dovrebbe avere $\mathbf{v}, \mathbf{f} \in \varphi[\alpha,w]$, il che è incompatibile con la definizione di mondo data sopra). Sia S' un sottoinsieme di S. Definiamo allora $W(S')$ come l'unione di tutti i $W(s)$ per ogni s in S'. Così, ad esempio, in un'interpretazione M, $W(\mathbf{B})$ è l'insieme di tutti i mondi compatibili con le situazioni ritenute possibili dal soggetto epistemico. Si noti inoltre che, dato l'insieme S, $W(S)$ è l'insieme di tutti i mondi compresi in S.

Prima di passare a definire le regole semantiche, si noti che in un'interpretazione così definita, data una formula α e una situazione s, non è detto che α sia vera se e soltanto se $\neg\alpha$ è falsa: può accadere che α e $\neg\alpha$ siano entrambe vere in s, o che nessuna delle due lo sia. Quindi, nella definizione delle regole semantiche per il linguaggio non è sufficiente una relazione di soddisfacibilità $\models$ definita come per le strutture di Kripke standard (par. 8.2). Vengono quindi introdotte due relazioni distinte $\models_{\mathbf{v}}$ e $\models_{\mathbf{f}}$, dette da Levesque *relazioni di sostegno* (*support relation*), dove $M,s \models_{\mathbf{v}} \alpha$ e $M,s \models_{\mathbf{f}} \alpha$ possono essere lette rispettivamente come "la situazione s sostiene la verità della formula α nell'interpretazione M" e "la situazione s sostiene la falsità della formula α nell'interpretazione M". $\models_{\mathbf{v}}$ e $\models_{\mathbf{f}}$ sono definite dalle seguenti clausole:

$M,s \models_{\mathbf{v}} p$ dove p è una formula primitiva, sse $\mathbf{v} \in \varphi[s,p]$,
$M,s \models_{\mathbf{f}} p$ dove p è una formula primitiva, sse $\mathbf{f} \in \varphi[s,p]$,

$M,s \models_{\mathbf{v}} \neg \alpha$ sse $M,s \models_{\mathbf{f}} \alpha$,
$M,s \models_{\mathbf{f}} \neg \alpha$ sse $M,s \models_{\mathbf{v}} \alpha$,

$M,s \models_{\mathbf{v}} \alpha \wedge \beta$ sse $M,s \models_{\mathbf{v}} \alpha$ e $M,s \models_{\mathbf{v}} \beta$,
$M,s \models_{\mathbf{f}} \alpha \wedge \beta$ sse $M,s \models_{\mathbf{f}} \alpha$ oppure $M,s \models_{\mathbf{f}} \beta$,

$M,s \models_{\mathbf{v}} E\alpha$ sse $M,s' \models_{\mathbf{v}} \alpha$ per tutte le situazioni $s' \in \mathbf{B}$,

[4]Poiché non sono ammesse modalità iterate, non è necessario introdurre una relazione di accessibilità fra situazioni, ma è sufficiente indicare quali sono le situazioni accessibili al soggetto epistemico nel mondo reale.

$M,s \models_{\mathbf{f}} E\alpha$ sse $M,s \not\models_{\mathbf{v}} E\alpha$,

$M,s \models_{\mathbf{v}} B\alpha$ sse $M,s' \models_{\mathbf{v}} \alpha$ per tutte le $s' \in W(\mathbf{B})$,
$M,s \models_{\mathbf{f}} B\alpha$ sse $M,s \not\models_{\mathbf{v}} B\alpha$.

E' facile constatare che, se ci si limita a mondi anziché a situazioni, la parte non modale della logica così definita equivale alla logica proposizionale classica (in particolare, per ogni interpretazione M e per ogni $w \in W(S)$, si avrà che $M,w \models_{\mathbf{v}} \neg\alpha$ sse $M,w \not\models_{\mathbf{v}} \alpha$). Dato un mondo $w \in W(S)$ e un'interpretazione M, diremo che una formula α è *vera* in w se e soltanto se $M,w \models_{\mathbf{v}} \alpha$. Altrimenti, diremo che α è *falsa* in w. Si noti che definire la verità rispetto a mondi anziché rispetto a generiche situazioni equivale, dal punto di vista intuitivo, a compiere l'assunzione che il mondo reale, qualunque esso sia, sia appunto un "mondo", sia cioè coerente e completo. In questo modo le situazioni incoerenti e/o incomplete vengono considerate entità semantiche con lo scopo esclusivo di modellare gli stati cognitivi di un soggetto epistemico. In base a questa definizione di verità una formula è vera se e soltanto se essa non è falsa, se e soltanto se la sua negazione è vera. Diremo che una formula α è *valida* (in simboli $\models \alpha$) se e soltanto se per ogni interpretazione M e per ogni mondo $w \in W(S)$, si ha che $M,w \models_{\mathbf{v}} \alpha$. Diremo che una formula è *soddisfacibile* se e soltanto se la sua negazione non è valida.

Per quanto concerne la credenza implicita, si può facilmente constatare che la logica così definita, rispetto all'operatore B, coincide con il sottoinsieme di **K** (par. 8.1) che non comprende modalità iterate. In particolare, sono credute implicitamente tutte le formule (non modali) valide. Vale cioè che:

se $\models \alpha$, allora $\models B\alpha$.

Inoltre, la credenza implicita è chiusa rispetto all'implicazione materiale, è cioè valida la formula seguente:

$$B\,\alpha \wedge B(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow B\beta.$$

Più interessante è il comportamento dell'operatore E per la credenza esplicita. Si può constatare innanzi tutto che la credenza esplicita non è chiusa rispetto all'implicazione materiale. E' soddisfacibile, ad esempio, il seguente insieme di formule:

$$(*)\ \{Ep, E(p \rightarrow q), \neg Eq\}.$$

Per comprendere perché ciò avvenga, si consideri innanzi tutto che, sulla base delle definizioni delle relazioni di sostegno e del connettivo "$\rightarrow$", si ha che, per ogni interpretazione M e per ogni situazione s:

$M,s \models_{\mathbf{v}} \alpha \rightarrow \beta$ se e soltanto se $M,s \models_{\mathbf{f}} \alpha$ oppure $M,s \models_{\mathbf{v}} \beta$.

Affinché le formule di (*) siano soddisfatte in un'interpretazione M è necessario che, per ogni $s \in \mathbf{B}$, p e $p \rightarrow q$ siano vere in s, mentre deve esistere almeno un $s' \in \mathbf{B}$ per cui q è falso in s'. Che ciò sia possibile è evidente se si considera una situazione s' per la quale valga quanto segue:

$$\varphi[s',p] = \{\mathbf{v}, \mathbf{f}\},$$
$$\varphi[s',q] = \{\mathbf{f}\}.$$

In s' è vera p (in quanto $\mathbf{v} \in \varphi[s',p]$), ed è vera anche $p \rightarrow q$ (in quanto $\mathbf{f} \in \varphi[s',p]$), ma al contempo q risulta essere falsa.

Le formule valide non devono necessariamente essere credute esplicitamente. Ad esempio, è soddisfacibile la seguente formula:

$$(**)\ \neg E(p \vee \neg p).$$

Perché ciò accada $p \vee \neg p$ deve essere falsa in almeno una situazione $s \in \mathbf{B}$. A tal fine è sufficiente che in s il valore di verità di p non sia definito, che si abbia cioè $\varphi[s,p] = \varnothing$.

Si noti inoltre che, a differenza delle logiche basate sui modelli minimali (par. 8.3), nella logica della credenza implicita ed esplicita di Levesque è possibile che una formula valida sia creduta esplicitamente senza che al contempo sia creduta esplicitamente *ogni* formula valida. In generale, possono non essere credute esplicitamente le formule logicamente equivalenti a una formula creduta esplicitamente. Così, è soddisfacibile il seguente insieme di formule:

$$(***)\ \{Ep, \neg E(p \wedge (q \vee \neg q))\}.$$

Questo accade se p è vera in tutte le situazioni di **B**, ma, al contempo, esiste una situazione $s \in \mathbf{B}$ in cui il valore di verità di q non è definito.

Infine, una contraddizione può essere creduta esplicitamente, senza che al tempo stesso sia creduta esplicitamente qualsiasi formula. Possono ad esempio essere soddisfatte le seguenti formule:

$$(****)\ \{Ep, E\neg p, \neg Eq\}.$$

E' sufficiente che, per ogni $s \in B$, $\varphi[s,p] = \{\mathbf{v}, \mathbf{f}\}$, ma che al contempo esista $s' \in \mathbf{B}$ per cui $\mathbf{v} \notin \varphi[s',q]$.

Per quanto concerne le relazioni fra conoscenza implicita ed esplicita, nella logica qui descritta tutto ciò che è creduto esplicitamente è anche una credenza implicita del soggetto epistemico. E' valida cioè la seguente formula:

$$E\alpha \rightarrow B\alpha.$$

Ciò è chiaro se si considera che, per ogni situazione s, se s è coerente, allora tutti i mondi in $W(s)$ "completano" s, mantenendo i valori di verità che valgono in s dove s è definita; d'altra parte, se s è incoerente, allora $W(\mathbf{B}) = \emptyset$. Quindi, le formule che sono vere in tutte le situazioni $s \in \mathbf{B}$ sono vere anche in tutti i mondi $w \in W(\mathbf{B})$.

Si noti inoltre che se un soggetto epistemico crede esplicitamente una contraddizione, allora egli crede implicitamente ogni formula proposizionale. Cioè, se β è una formula proposizionale qualunque, vale che:

$$E(\alpha \wedge \neg\alpha) \rightarrow B\beta.$$

Infatti, se è vero $E(\alpha \wedge \neg\alpha)$, allora, per ogni $s \in \mathbf{B}$, s è incoerente e $W(s) = \emptyset$. Quindi $W(\mathbf{B}) = \emptyset$, e, di conseguenza, ogni formula è vera in tutti gli elementi di $W(\mathbf{B})$.

Per quanto riguarda la teoria della dimostrazione, Levesque fornisce la seguente assiomatizzazione della logica da lui proposta:

assiomi:

(1) assiomi del calcolo proposizionale
(2) $B\alpha \wedge B(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow B\beta$
(3) $E\alpha \rightarrow B\alpha$
(4) $E(\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow E(\beta \wedge \alpha)$
(5) $E(\alpha \vee \beta) \leftrightarrow E(\beta \vee \alpha)$
(6) $E(\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)) \leftrightarrow E((\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma)$
(7) $E(\alpha \vee (\beta \vee \gamma)) \leftrightarrow E((\alpha \vee \beta) \vee \gamma)$
(8) $E(\alpha \wedge (\beta \vee \gamma)) \leftrightarrow E((\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma))$
(9) $E(\alpha \vee (\beta \wedge \gamma)) \leftrightarrow E((\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma))$
(10) $E\neg(\alpha \vee \beta) \leftrightarrow E(\neg\alpha \wedge \neg\beta)$
(11) $E\neg(\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow E(\neg\alpha \vee \neg\beta)$
(12) $E\neg\neg\alpha \leftrightarrow E\alpha$
(13) $E\alpha \wedge E\beta \leftrightarrow E(\alpha \wedge \beta)$
(14) $E\alpha \vee E\beta \rightarrow E(\alpha \vee \beta)$.

Regole:

- da α e $\alpha \rightarrow \beta$ segue β (*modus ponens*)
- da α segue $B\alpha$ (regola di necessitazione).

Si può quindi dimostrare il seguente risultato:

Teorema: La precedente assiomatizzazione è corretta e completa rispetto alla logica della credenza implicita ed esplicita. (Levesque 1984a, b)

Un'assiomatizzazione più sintetica della logica della credenza implicita ed esplicita è riportata in McArthur(1988), che fornisce il seguente sistema di assiomi:

assiomi:

(1-3) (come sopra)
(4) $E\neg\neg\alpha \leftrightarrow E\alpha$
(5) $E\alpha \wedge E\beta \leftrightarrow E(\alpha \wedge \beta)$
(6) $E\alpha \vee E\beta \rightarrow E(\alpha \vee \beta)$.
(7) $E(\alpha \wedge (\beta \vee \gamma)) \rightarrow E((\alpha \wedge \beta) \vee \gamma)$

Regole

- *modus ponens* (come sopra)
- regola di necessitazione (come sopra)
- da $((E\alpha \vee E\beta) \rightarrow E\gamma)$ segue $B(\alpha \vee \beta) \rightarrow E\gamma$
- da $(E\alpha \rightarrow E\beta)$ segue $E\neg\beta \rightarrow E\neg\alpha$

La logica della credenza implicita ed esplicita presenta punti di contatto con le logiche rilevanti[5]. In particolare, la logica che vale all'interno dei contesti di credenza esplicita ha forti legami con la logica del *tautological entailment* (Anderson e Belnap 1962; Belnap 1975, 1977). Belnap (1977) sostiene che questo tipo di logica risulta particolarmente adatto per formalizzare i processi deduttivi di un calcolatore, che deve essere in grado di trattare informazioni incoerenti o incomplete[6]. Un'interpretazione per una logica proposizionale del *tautological entailment* (da McArthur 1988) è una coppia $I = (S,\varphi)$, dove S è un insieme di situazioni s e φ è una funzione interpretazione da formule a sottoinsiemi di $\{\mathbf{v}, \mathbf{f}\}$, come nella logica di Levesque. Anche in questo caso abbiamo due relazioni di supporto distinte, una per il vero e una per il falso, definite come segue:

$s \models_{\mathbf{v}} p$ se e solo se $\mathbf{v} \in \varphi[s,p]$,
$s \models_{\mathbf{f}} p$ se e solo se $\mathbf{f} \in \varphi[s,p]$,

$s \models_{\mathbf{v}} \neg\alpha$ se e solo se $s \models_{\mathbf{f}} \alpha$
$s \models_{\mathbf{f}} \neg\alpha$ se e solo se $s \models_{\mathbf{v}} \alpha$

$s \models_{\mathbf{v}} \alpha \wedge \beta$ se e solo se $s \models_{\mathbf{v}} \alpha$ e $s \models_{\mathbf{v}} \beta$
$s \models_{\mathbf{f}} \alpha \wedge \beta$ se e solo se $s \models_{\mathbf{f}} \alpha$ oppure $s \models_{\mathbf{f}} \beta$

Come si vede, in questa logica i connettivi si comportano in maniera analoga a quanto accade per la conoscenza esplicita nella logica di Levesque. Definiamo come segue la relazione di *tautological entailment* (per cui useremo il simbolo $\rightarrow_{TE}$) fra due formule. Date due formule α e β, $\alpha \rightarrow_{TE} \beta$ se e soltanto se, per ogni interpretazione $I = (S,\varphi)$ e per ogni situazione $s \in S$, se $s \models_{\mathbf{v}} \alpha$, allora $s \models_{\mathbf{v}} \beta$, e se $s \models_{\mathbf{f}} \beta$, allora $s \models_{\mathbf{f}} \alpha$. La nozione di *tautological entailment* è più debole della nozione di implicazione materiale classica (e, in generale, risulta più facilmente trattabile dal punto di vista computazionale - cfr. oltre, par. 12.3). Si può dimostrare che si ha $\models E\alpha \rightarrow E\beta$ nella logica di Levesque se e soltanto se $\alpha \rightarrow_{TE} \beta$.

10.2 Estensioni e sviluppi della logica di Levesque

Un limite della logica di Levesque è costituito dal fatto di non ammettere modalità iterate. D'altro canto, estendere in maniera ovvia la semantica sopra descritta per consentire di valutare formule con operatori modali iterati (sostituendo, ad esempio, all'insieme **B** una relazione di accessibilità binaria fra situazioni) comporterebbe conseguenze non desiderabili. In base alla semantica data da Levesque, una formula modale è falsa in una situazione s se e soltanto se essa non è vera in s. Pertanto tutte le situazioni risultano corrette e complete rispetto alle formule modali. Quindi, estendendo la semantica in maniera da consentire di iterare gli operatori di credenza si avrebbe come conseguenza che i

[5]Il problema centrale affrontato dalle logiche rilevanti (si veda ad esempio Dunn 1986) consiste nell'individuare un concetto di implicazione che sia più restrittivo rispetto all'implicazione materiale della logica classica, nel senso che, affinché un'implicazione sia vera, la verità delle premesse sia rilevante per la verità delle conclusioni. Ad esempio, si vuole evitare che da una contraddizione si possa derivare qualsiasi formula, o che tutte le tautologie siano implicate da una formula qualunque.

[6]La logica proposta da Belnap è il tipo di logica rilevante utilizzata anche da Thomason e Horty (1988) e da Patel-Schneider (1989a, 1990) (cfr. par. 7.1).

soggetti epistemici risulterebbero logicamente onniscienti rispetto alle loro credenze. Ad esempio, risulterebbe valido il seguente caso particolare dell'assioma di chiusura deduttiva:

$$EE\alpha \wedge E(E\alpha \rightarrow E\beta) \rightarrow EE\beta,$$

il che non è certamente adeguato allo spirito con cui è stato introdotto il concetto di credenza esplicita.

Una generalizzazione della logica della credenza implicita ed esplicita che permetta di iterare gli operatori di credenza evitando questi problemi è stata proposta da Lakemeyer (1987)[7]. Nella logica di Levesque il fatto che sia creduta esplicitamente una certa formula è in un certo senso scorrelato dal fatto che sia creduta la sua negazione. In un certo senso, è come se il soggetto epistemico utilizzasse fonti di evidenza diverse per confermare o per disconfermare gli oggetti della sua credenza. Lakemeyer generalizza quest'idea nell'ambito di una semantica di tipo, in senso lato, kripkeano. L'idea intuitiva è che in una situazione un soggetto epistemico, per confermare una sua credenza, faccia riferimento ad un certo insieme di situazioni accessibili, e che lo stesso accada quando egli intende escludere una credenza. Il punto è che i due insiemi, in generale, non devono necessariamente coincidere. E' come se, sottolinea Lakemeyer, un agente utilizzasse modalità di pensiero differenti quando ottiene credenze positive o negative sui propri stati epistemici (Lakemeyer mette in guardia che il modello da lui proposto non va inteso come una caratterizzazione psicologicamente adeguata delle prestazioni inferenziali umane, ma come un modello plausibile delle capacità inferenziali di un soggetto razionale artificiale limitato). Dal punto di vista formale, questo si traduce nell'introdurre *due* relazioni di accessibilità fra situazioni, R e $\overline{R}$, utilizzate rispettivamente per determinare le credenze positive e quelle negative. Data una situazione s, una formula α è *creduta vera* in s se e soltanto se α è vera in tutte le situazioni che sono accessibili da s tramite la relazione di accessibilità R, mentre α è *creduta falsa* in s se e soltanto se α è falsa in tutte le situazioni che sono accessibili da s tramite la relazione di accessibilità $\overline{R}$.

Anche la logica di Lakemeyer è formulata come una logica della credenza implicita ed esplicita. Le credenze implicite di un soggetto epistemico non hanno direttamente a che fare con gli stati cognitivi del soggetto stesso, ma costituiscono una caratterizzazione puramente "esterna" di ciò che è implicito nelle credenze del soggetto. Lakemeyer assume quindi che non abbia senso parlare di credenze esplicite relative alle proprie credenze implicite, ed esclude quindi che l'operatore B di credenza implicita possa comparire nell'ambito dell'operatore di credenza esplicita E[8].

Il linguaggio della logica di Lakemeyer, che egli chiama sistema **BLK**, è dunque lo stesso di quello della logica di Levesque, eccetto per il fatto che la clausola iv. della definizione dell'insieme delle formule è sostituita dalle due clausole seguenti:

iv. se α è una formula che non contiene alcuna occorrenza di B, allora $(E\alpha)$ è una formula;

iv'. se α è una formula, allora $(B\alpha)$ è una formula.

Per quanto concerne la semantica, un'interpretazione per **BLK** è una quadrupla $M = (S, \varphi, R, \overline{R})$, dove S è un insieme di situazioni, φ è definita come nella semantica per la logica di Levesque, e R e $\overline{R}$ sono relazioni binarie definite su S. Una situazione $w \in S$ è un *mondo* se e soltanto se, come nella logica di Levesque, φ rispetto a w assegna uno ed un solo valore di verità ad ogni formula primitiva del linguaggio, e se inoltre R e $\overline{R}$ coincidono rispetto a w, se cioè vale che:

$$\text{per ogni } s \in S,\ R(w,s) \text{ sse } \overline{R}(w,s).$$

Inoltre Lakemeyer impone che, per tutti i mondi w e $w' \in S$, e per tutte le situazioni $s \in S$, valga che:

$$\text{(a) se } R(w,w') \text{ e } R(w',s), \text{ allora } R(w,s)$$

$$\text{(b) se } R(w,w') \text{ e } R(w,s), \text{ allora } R(w',s).$$

La condizione (a) è il corrispettivo della *transitività* della relazione di accessibilità nelle interpretazioni di Kripke, mentre (b) corrisponde a imporre che la relazione di accessibilità sia *euclidea*. Come vedremo, poiché R e $\overline{R}$

[7]Lakemeyer ha proposto ulteriori sviluppi della logica di Levesque anche in (Lakemeyer 1991a). Egli ne ha inoltre studiato l'estensione al primo ordine (Lakemeyer 1986), e ha utilizzato questi formalismi nell'ambito del ragionamento non monotòno di tipo autoepistemico, elaborando modelli di ragionatori autoepistemici classicamente non onniscienti (Lakemeyer e Levesque 1988; Lakemeyer 1990; Lakemeyer 1991b).

[8]Questo tipo di restrizione non sembra più adeguato nel caso si abbia a che fare con una logica che prevede più attori epistemici. In tal caso, ad esempio, sarebbe del tutto plausibile che un attore i creda esplicitamente che un altro attore j creda implicitamente che α, cioè che si abbia che $E_i B_j \alpha$.

coincidono rispetto ai mondi, (a) e (b) fanno sì che l'operatore di credenza implicita si comporti in maniera analoga all'operatore modale B in **S5** debole.

Data un'interpretazione M, le seguenti regole definiscono cosa significhi per una situazione s sostenere la verità ($\models_{\mathbf{v}}$) o la falsità ($\models_{\mathbf{f}}$) di una formula.

$M,s \models_{\mathbf{v}} p$ dove p è una formula primitiva, sse $\mathbf{v} \in \varphi[s,p]$,
$M,s \models_{\mathbf{f}} p$ dove p è una formula primitiva, sse $\mathbf{f} \in \varphi[s,p]$,

$M,s \models_{\mathbf{v}} \neg\alpha$ sse $M,s \models_{\mathbf{f}} \alpha$,
$M,s \models_{\mathbf{f}} \neg\alpha$ sse $M,s \models_{\mathbf{v}} \alpha$,

$M,s \models_{\mathbf{v}} \alpha \wedge \beta$ sse $M,s \models_{\mathbf{v}} \alpha$ e $M,s \models_{\mathbf{v}} \beta$,
$M,s \models_{\mathbf{f}} \alpha \wedge \beta$ sse $M,s \models_{\mathbf{f}} \alpha$ oppure $M,s \models_{\mathbf{f}} \beta$,

$M,s \models_{\mathbf{v}} E\alpha$ sse $M,s' \models_{\mathbf{v}} \alpha$ per tutte le situazioni s' tali che $R(s,s')$,
$M,s \models_{\mathbf{f}} E\alpha$ sse $M,s' \not\models_{\mathbf{v}} \alpha$ per qualche situazione s' tale che $\overline{R}(s,s')$,

$M,s \models_{\mathbf{v}} B\alpha$ sse $M,w \models_{\mathbf{v}} \alpha$ per tutti i mondi w tali che $R(s,w)$,
$M,s \models_{\mathbf{f}} B\alpha$ sse $M,s \not\models_{\mathbf{v}} B\alpha$.

Le definizioni di verità in un'interpretazione e di validità sono le stesse della logica di Levesque.

E' facile constatare come dalla definizione della semantica segue che **BLK** è un'estensione della logica della credenza implicita ed esplicita di Levesque. Quindi, tutte le formule che sono valide o soddisfacibili in quest'ultima sono rispettivamente valide o soddisfacibili in **BLK**. Come nella logica di Levesque, anche in **BLK** tutto ciò che è creduto esplicitamente è creduto anche implicitamente, si ha cioè che:

$$\models E\alpha \rightarrow B\alpha.$$

Si noti però che ora α può contenere anche occorrenze dell'operatore E. Anche in **BLK** gli insiemi di formule (*)-(****) del paragrafo precedente sono soddisfacibili. Cioè, le credenze esplicite non sono chiuse rispetto all'implicazione, le formule valide non devono essere credute esplicitamente, una formula logicamente equivalente ad una credenza esplicita non deve essere creduta esplicitamente, e le credenze esplicite possono essere incoerenti senza che sia creduta esplicitamente ogni formula.

Come conseguenza delle restrizioni (a) e (b) imposte sulla relazione di accessibilità R, l'operatore B di credenza implicita si comporta esattamente come in **S5** debole. Quindi, la credenza implicita è chiusa rispetto all'implicazione e alla regola di necessitazione, e si ha inoltre che:

$$\models B\alpha \rightarrow BB\alpha$$
$$\models \neg B\alpha \rightarrow B\neg B\alpha.$$

Valgono cioè i principi di introspezione positiva e negativa rispetto alla conoscenza implicita. Inoltre, per come sono definite (a) e (b), valgono anche le seguenti forme di "introspezione" relative alle credenze esplicite:

$$\models E\alpha \rightarrow BE\alpha$$
$$\models \neg E\alpha \rightarrow B\neg E\alpha.$$

Tuttavia, in **BLK** per la credenza esplicita non vale né il principio di introspezione positiva, né il principio di introspezione negativa. E' facile constatare, ad esempio, che in **BLK** è soddisfacibile la formula:

$$E\alpha \wedge \neg EE\alpha.$$

Consideriamo un'interpretazione M come in fig. 10.1. In tale interpretazione $M,s_1 \models_{\mathbf{v}} \alpha$ e $M,s_2 \models_{\mathbf{v}} \alpha$, ma $M,s_3 \not\models_{\mathbf{v}} \alpha$. Poiché $M,s_3 \not\models_{\mathbf{v}} \alpha$, allora $M,s_2 \not\models_{\mathbf{v}} E\alpha$ (in base alla regola semantica per $\models_{\mathbf{v}} E\alpha$). Quindi, si ha che $M,w \models_{\mathbf{f}} EE\alpha$, e, di conseguenza $M, w \models_{\mathbf{v}} \neg EE\alpha$. D'altra parte, da (a) e da (b) non segue che $R(w,s_3)$ (in quanto la transitività vale rispetto ai mondi e non alle situazioni); quindi si ha che $M , w \models_{\mathbf{v}} E\alpha$.

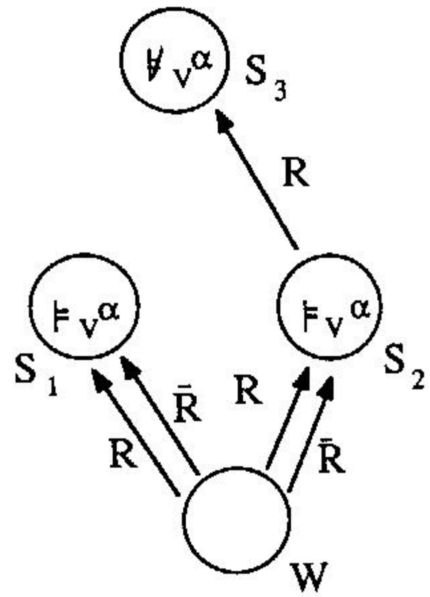

fig. 10.1

Lakemeyer propone di modificare **BLK** in maniera da rendere valida l'introspezione positiva per la credenza esplicita. Egli chiama **BL4** la logica che ne risulta. Affinché valga $E\alpha \rightarrow EE\alpha$ è sufficiente imporre che la relazione di accessibilità R sia transitiva rispetto alle situazioni, cioè che si abbia:

(c) per ogni situazione s, s' e s'' in S, se $R(s,s')$ e $R(s',s'')$, allora $R(s,s'')$.

Questa condizione da sola comporta tuttavia conseguenze indesiderabili. Contrariamente a quanto accadeva in **BLK**, non si avrebbe più che:

$$\models EE\alpha \rightarrow EE\beta \text{ sse } \models E\neg E\beta \rightarrow E\neg E\alpha,$$

in quanto, in particolare, si avrebbe:

$$\models EE\alpha \rightarrow EEE\alpha$$

ma

$$\not\models E\neg EE\alpha \rightarrow E\neg E\alpha.$$

Per constatare che $\not\models E\neg EE\alpha \rightarrow E\neg E\alpha$ è sufficiente individuare un'interpretazione in cui sia soddisfacibile $E\neg EE\alpha \wedge \neg E\neg E\alpha$. Si consideri un'interpretazione M come quella in fig. 10.2. In fig. 10.2 si ha che $M,s_3 \not\models_{\mathbf{v}} \alpha$. Quindi, per la regola che definisce $\models_{\mathbf{v}} E\alpha$, $M,s_2 \not\models_{\mathbf{v}} E\alpha$. Di conseguenza, $M,s_1 \models_{\mathbf{f}} EE\alpha$, che, per la regola semantica della negazione, equivale a $M,s_1 \models_{\mathbf{v}} \neg EE\alpha$. Siccome poi s_1 è l'unica situazione accessibile da w, allora si ha che $M,w \models_{\mathbf{v}} E\neg EE\alpha$. D'altra parte, si ha che $M,s_2 \models_{\mathbf{v}} \alpha$. Quindi, siccome s_2 è l'unica situazione accessibile mediante $\overline{R}$ da s_1, per la regola di $\models_{\mathbf{f}} E\alpha$ si ha che $M,s_1 \not\models_{\mathbf{f}} E\alpha$. Questo, per la regola della negazione, equivale a $M,s_1 \not\models_{\mathbf{v}} \neg E\alpha$. Ciò comporta che $M,w \models_{\mathbf{f}} E\neg E\alpha$, e quindi $M,w \models_{\mathbf{v}} \neg E\neg E\alpha$.

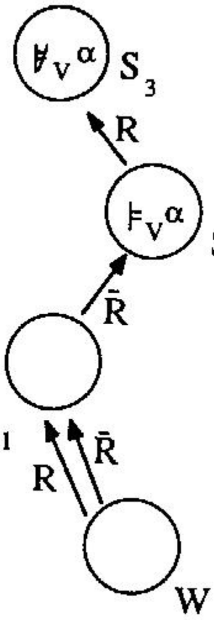

fig. 10.2

Per evitare ciò, è necessario aggiungere un'ulteriore condizione di transitività che metta in relazione R con $\overline{R}$ nelle interpretazioni di **BL4**, vale a dire:

(d) per ogni situazione s, s' e s'' in S, se $\overline{R}(s,s')$ e $R(s',s'')$, allora $\overline{R}(s,s'')$.

In **BL4** le relazioni di accessibilità R e $\overline{R}$ godono dunque delle proprietà (a)-(d). Nell'esempio di fig. 10.2 la condizione (d) comporta che s_1 stia nella relazione $\overline{R}$ con s_3. Questo fa sì che si abbia $M,s_1 \models_f E\alpha$, e quindi $M,s_1 \models_v \neg E\alpha$ e $M,w \models_v E\neg E\alpha$.

Un aspetto problematico delle logiche basate su situazioni incoerenti e incomplete, che, implicitamente, era già evidente nel lavoro di Levesque (1984), ma che è stato messo successivamente in luce in maniera esplicita da diversi autori (Vardi 1986, Fagin e Halpern 1988), consiste nel fatto che, benché in queste logiche un soggetto epistemico non sia logicamente onnisciente rispetto alla logica classica, esso risulta logicamente onnisciente rispetto a qualche tipo di logica non classica (nel caso di Levesque rispetto alla logica del *tautological entailment*). Questo fatto emerge in maniera particolarmente evidente se si considera la logica descritta in (Fagin, Halpern e Vardi 1990). Fagin, Halpern e Vardi propongono un sistema non classico che chiamano *nonstandard propositional logic* (**NPL**), che generalizza i sistemi di Levesque e Lakemeyer. **NPL** è correlato alle logiche basate sulle situazioni, ma segue un'impostazione differente: anziché utilizzare la logica classica per la componente non modale, e limitare la logica non classica all'ambito degli operatori modali, in **NPL** viene interpretato in maniera non classica tutto il linguaggio, anche per la parte non modale. Poiché Fagin, Halpern e Vardi formulano la loro logica per un numero qualsiasi di soggetti epistemici, il linguaggio di **NPL** è un linguaggio proposizionale dotato di negazione e congiunzione ed esteso mediante n operatori modali di credenza, uno per ciascun soggetto. Qui, per semplicità, ci limiteremo ad un solo soggetto, ed utilizzeremo quindi un solo operatore di credenza che, per analogia con le logiche sopra descritte, indicheremo con E.

Abbiamo visto che ciò che distingue le logiche basate su situazioni dalla logica classica consiste fondamentalmente nel modo in cui vengono valutate le formule negate: il valore di verità assegnato a una formula è di fatto scorrelato dal valore di verità assegnato alla sua negazione. Sulla base di ciò, per la semantica di **NPL** Fagin, Halpern e Vardi anziché utilizzare situazioni incoerenti o incomplete utilizzano mondi possibili classici. L'incoerenza e l'incompletezza vengono ottenute impiegando una tecnica già utilizzata in logica rilevante (Routley e Routley 1972; Routley e Meyer 1973). Ad ogni mondo w nell'interpretazione è associato un altro mondo w^*; una formula di tipo $\neg\alpha$ è vera in w se e soltanto se α è falsa in w^*. Intuitivamente quindi w fornisce il supporto per la verità delle formule non negate, e w^* fornisce il supporto per la verità delle formula negate. Così, data una formula α, può accadere che in un mondo né α né la sua negazione siano vere, oppure che siano vere entrambe. I mondi che, ai fini della semantica, si comportano come mondi possibili classici sono quei w per cui si ha che $w = w^*$. Definiamo quindi un'interpretazione per **NPL** come una quadrupla $M = (W, \varphi, R, ^*)$, dove W è un insieme di mondi, φ è un'assegnazione di valori di verità alle formule primitive del linguaggio e R è una relazione di accessibilità fra mondi. W, φ e R sono del tutto analoghi ai loro corrispettivi delle strutture di Kripke standard (par. 8.2). * è una funzione ad un argomento da membri di W a membri di W, tale che, per ogni $w \in W$, $w^{**} = w$. La relazione $\models$ è definita come segue. Per le formule negate si ha:

$$M,w \models \neg\alpha \text{ sse } M,w^{*} \not\models \alpha.$$

Per tutti gli altri tipi di formule la definizione è identica alla definizione di $\models$ per le strutture di Kripke standard. In particolare, si ha:

$$M,w \models E\alpha \text{ sse } M,w' \models \alpha \text{ per ogni } w' \text{ tale che } R(w,w').$$

Le nozioni di validità e di conseguenza logica sono definite nella maniera usuale.

Per la parte modale, **NPL** è equivalente alle logiche di Levesque e Lakemeyer. Si noti che l'implicazione materiale definita in modo classico (dove cioè $\alpha \rightarrow \beta$ è definito come $\neg(\neg\alpha \wedge \beta)$) è particolarmente debole in **NPL**. In particolare, non è vero che, se β è conseguenza logica di α, allora è valida $\alpha \rightarrow \beta$. Fagin, Halpern e Vardi definiscono quindi un nuovo operatore di *implicazione forte* (*strong implication*), che rappresentiamo mediante il simbolo "a", dove $\alpha \mathsf{a} \beta$ è vero in **NPL** ogni qual volta che, se α è vera, allora è vera β. La regola semantica corrispondente a è dunque la seguente:

$$M,w \models \alpha \mathsf{a} \beta \text{ sse } M,w \models \alpha \text{ oppure } M,w \not\models \beta.$$

a risulta essere una generalizzazione di $\rightarrow_{TE}$. Ad esempio, le formule $(\alpha \wedge \neg\alpha) \mathsf{a} \beta$ e $\beta \mathsf{a} (\alpha \vee \neg\alpha)$ non sono valide in **NPL**. La cosa interessante tuttavia è che in **NPL** è valido l'assioma distributivo definito rispetto a a :

$$(E\alpha \wedge E(\alpha \mathsf{a} \beta)) \mathsf{a} E\beta;$$

inoltre, in **NPL** sono credute tutte le formule valide (rispetto, ovviamente, alla semantica della logica non standard):

$$\text{se } \models \alpha, \text{ allora } \models E\alpha.$$

Quindi, i soggetti epistemici in **NPL** sono logicamente onniscienti rispetto alla logica dell'implicazione forte. Come abbiamo visto, si tratta di una logica più debole rispetto a quella classica. Tuttavia - come fa notare Vardi - non sembra che un soggetto razionale finito possa essere un ragionatore perfetto in qualche logica non classica più di quanto non lo sia in logica classica.

Altri problemi posti dalle logiche epistemiche basate su situazioni incoerenti sono stati messi successivamente in luce in Fagin e Halpern (1988) e in McArthur (1988). Ad esempio, Fagin e Halpern (1988) distinguono tre casi particolari del problema dell'onniscienza logica:

a) *chiusura rispetto all'implicazione*: se α e $\alpha \rightarrow \beta$ sono credute, allora è creduta anche β;
b) *chiusura rispetto all'implicazione valida*: se α è creduta, e $\alpha \rightarrow \beta$ è una formula valida, allora β è creduta;
c) il fatto che siano credute tutte le formule valide.

La credenza esplicita nelle logiche di Levesque e Lakemeyer non gode di nessuna di queste tre proprietà. Per quanto riguarda la chiusura rispetto all'implicazione, abbiamo visto che, ad esempio, $E\alpha \wedge E(\alpha \rightarrow \beta) \wedge \neg E\beta$ può essere soddisfatta. Per quanto riguarda la chiusura rispetto all'implicazione, si può constatare facilmente che, benché $\alpha \rightarrow (\alpha \wedge (\beta \vee \neg\beta))$ sia valida, tuttavia $E\alpha \wedge \neg E(\alpha \wedge (\beta \vee \neg\beta))$ è soddisfacibile. Infine, rispetto alla credenza delle formula valide, abbiamo visto che è soddisfacibile $\neg E(\alpha \vee \neg\alpha)$.

Tuttavia, Fagin e Halpern mettono in luce che i motivi per cui la credenza esplicita non è chiusa rispetto all'implicazione sono diversi dai motivi per cui non sono credute esplicitamente tutte le formule valide. Inoltre, secondo Fagin e Halpern, nelle logiche basate su situazioni la chiusura rispetto all'implicazione non vale per le ragioni sbagliate.

Infatti, per un verso, la mancanza di chiusura rispetto all'implicazione è strettamente connessa alla possibilità di avere situazioni incoerenti. Si consideri la ragione per cui l'insieme di formule $\{Ep, E(p \rightarrow q), \neg Eq\}$ risulta soddisfacibile: è necessario che in almeno una delle situazioni ritenute possibili p risulti sia vera che falsa. Nelle logiche basate sulle situazioni, o alcune delle situazioni ritenute possibili dal soggetto epistemico sono incoerenti, oppure le credenze esplicite sono chiuse rispetto all'implicazione. Ciò è evidente se si considera il fatto che risulta valida la formula seguente:

$$E\alpha \wedge E(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow E(\beta \vee (\alpha \wedge \neg\alpha)).$$

Se, intuitivamente, consideriamo le situazioni incoerenti come dovute al fatto che parte delle informazioni del soggetto sono sbagliate, è come se la mancanza di chiusura rispetto all'implicazione derivasse dal fatto che un soggetto prende sempre in considerazione la possibilità che parte delle sue credenze siano false. Così, se un soggetto crede contemporaneamente α e $\alpha \rightarrow \beta$ senza credere al tempo stesso β, è perché egli ammette la possibilità che la sua credenza in α sia in un certo senso inaffidabile. Tutto ciò è decisamente poco intuitivo, o comunque sembra avere poco a che fare con le ragioni per cui le credenze dei soggetti epistemici reali non sono chiuse rispetto all'implicazione. In generale, in questo tipo di logiche sono spesso problematiche le intuizioni su cui poggia la plausibilità dell'uso di situazioni incoerenti, o di altri costrutti semantici come ad esempio le relazioni di accessibilità nella logica di Lakemeyer.

Diversa è la situazione per quanto riguarda il fatto che le formule valide non devono essere credute esplicitamente. Questo ha a che fare piuttosto con l'incompletezza che non con l'incoerenza delle situazioni ritenute possibili dal soggetto epistemico, ed è legato a quella che Fagin e Halpern chiamano *consapevolezza*. Diremo che un soggetto epistemico è *consapevole* di una formula primitiva p se e solo se vale che $E(p \vee \neg p)$. Indicheremo con Ap il fatto che il soggetto è consapevole di p. E' evidente che, dal punto di vista semantico, un soggetto epistemico è consapevole di una formula p se e soltanto se in ogni situazione ritenuta possibile p è vera o falsa (o, eventualmente, sia vera che falsa); intuitivamente, quindi, il soggetto epistemico è consapevole di p se è in grado di figurarsi in ogni situazione cosa voglia dire che p è vera o falsa. Estendendo la consapevolezza a formule non atomiche, diremo che il soggetto epistemico è consapevole di una formula α qualunque (in simboli, $A\alpha$) se e soltanto se, per ogni formula primitiva p che compare in α, si ha che Ap. In base a questa definizione, nelle logiche delle situazioni sono credute esplicitamente tutte le formule valide di cui il soggetto è consapevole. Si può infatti dimostrare che:

Proposizione: se α è una formula proposizionale valida, allora $\models A\alpha \rightarrow E\alpha$. (Fagin e Halpern 1988)

Per quanto riguarda la chiusura rispetto all'implicazione valida, la situazione è in un certo senso intermedia, nel senso che sia l'incoerenza delle situazioni ritenute possibili, sia la mancanza di consapevolezza possono contribuire a far sì che le credenze esplicite non siano chiuse rispetto all'implicazione valida. Se ad esempio si ha che è vera $E\alpha$, e inoltre $\alpha \rightarrow \beta$ è una formula valida, perché non si abbia $E\beta$ occorre che il soggetto epistemico non sia consapevole di $\alpha \rightarrow \beta$, oppure che ritenga possibile almeno una situazione in cui la formula α è sia vera che falsa.

Nel paragrafo seguente esamineremo le logiche che Fagin e Halpern hanno sviluppato a partire da tali considerazioni.