

APPUNTI SU

INFERENZE E RAGIONAMENTI

MARCELLO FRIXIONE

III Parte

6. Ragionamento probabilistico

6.1 Logica della probabilità

Nei primi due moduli del corso abbiamo assunto il *principio di bivalenza*, abbiamo assunto cioè che esistono due soli valori di verità, il vero e il falso, e che ogni enunciato può assumere uno e uno solo di tali valori. Rispetto a molti tipi di ragionamento che si possono incontrare nella vita reale questa assunzione è una semplificazione eccessiva. Vedremo qui e in seguito alcuni modelli di ragionamento in cui tale assunzione viene abbandonata. In questo paragrafo in particolare tratterò di uno di essi, il *ragionamento probabilistico*. In base al ragionamento probabilistico i casi in cui si è certi della verità o della falsità di un enunciato costituiscono due casi limite. Tra questi due casi limite si situa uno spettro di casi, nei quali si attribuisce a un enunciato un certo grado di probabilità intermedio. Rappresentiamo la probabilità che si verifichi l'evento (descritto dall'enunciato) A con un numero compreso tra 0 e 1, e la indichiamo con $P(A)$. (In questo paragrafo parlerò indifferentemente di probabilità di eventi o di enunciati in quanto ciò non è causa di confusioni). Avremo quindi che:

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

Se $P(A) = 1$, allora siamo certi che A è vero; se $P(A) = 0$, allora siamo certi che A è falso. $P(A) = n$, con $0 < n < 1$, significa che attribuiamo ad A la probabilità n . Come vedremo, la logica della probabilità presentata in questo paragrafo può essere vista come un'estensione della logica proposizionale classica che abbiamo studiato nel primo modulo: tutto quello che vale per la logica proposizionale classica può essere esteso alla logica della probabilità se si sostituisce al valore di verità V il valore di probabilità 1 e al valore di verità F il valore di probabilità 0.

Della probabilità si possono dare diverse interpretazioni. Facciamo riferimento qui alla cosiddetta *interpretazione classica*, in quanto si tratta della più semplice. In base all'interpretazione classica si ha che:

$$P(A) = \frac{\text{Numero degli esiti possibili in cui } A \text{ occorre}}{\text{Numero totale degli esiti possibili}}$$

Chiariamo questa definizione per mezzo di qualche semplice esempio. Consideriamo il lancio di una moneta. Quando si lancia una moneta gli esiti possibili sono due: una possibilità è che esca testa, l'altra possibilità è che esca croce. Indichiamo con E_T il fatto che un lancio ha avuto esito testa e con E_C il fatto che un lancio ha avuto esito croce. Poiché, su due esiti possibili complessivi, uno è l'esito possibile in cui occorre E_T (in cui cioè esce testa), in base alla definizione precedente si avrà che:

$$P(E_T) = \frac{1}{2}$$

Analogamente si avrà che:

$$P(E_C) = \frac{1}{2}$$

Consideriamo ora il lancio di un normale dado a sei facce. Quando si lancia un dado il numero totale degli esiti possibili è sei. Indichiamo con E_1 il fatto che un lancio ha prodotto come esito uno, con E_2 il fatto che un lancio ha prodotto come esito due, e, in generale, con E_n il fatto che un lancio ha prodotto come esito n (con $1 \leq n \leq 6$). Su sei esiti possibili complessivi, uno è l'esito in cui occorre E_1 (in cui cioè esce uno), uno è l'esito in cui occorre E_2 , e così via. Pertanto, in base alla definizione precedente si avrà che:

$$P(E_1) = P(E_2) = P(E_3) = P(E_4) = P(E_5) = P(E_6) = \frac{1}{6}$$

Vediamo ora, sulla base di tale definizione, qual è la probabilità di enunciati complessi costruiti per mezzo degli usuali connettivi logici. Consideriamo il caso dell'enunciato $\neg E_2$. Di sei esiti possibili, cinque sono quelli in cui occorre $\neg E_2$ (cioè tutti tranne quello in cui occorre E_2). Per cui si avrà che:

$$P(\neg E_2) = \frac{5}{6}$$

Nel caso di un enunciato come $E_2 \vee E_5$, ci sono due possibilità su sei che esso occorra (quella in cui l'esito è due e quella in cui l'esito è cinque). Pertanto si avrà che:

$$P(E_2 \vee E_5) = \frac{2}{6}$$

Consideriamo l'enunciato come $E_2 \wedge E_5$. Le possibilità che esso occorra sono nulle perché il lancio di un dado non può dare come esito allo stesso tempo due e cinque. Pertanto si ha che:

$$P(E_2 \wedge E_5) = \frac{0}{6} = 0$$

Analogamente, sono nulle le possibilità che occorra $E_2 \wedge \neg E_2$, in quanto l'enunciato $E_2 \wedge \neg E_2$ ha la struttura di una contraddizione, e quindi non può mai essere vero. Per cui anche in questo caso si ha che:

$$P(E_2 \wedge \neg E_2) = \frac{0}{6} = 0$$

Viceversa, $E_2 \vee \neg E_2$ ha la struttura di una tautologia, per cui, su sei esiti possibili, si verificherà sempre che $E_2 \vee \neg E_2$. Si avrà dunque che:

$$P(E_2 \vee \neg E_2) = \frac{6}{6} = 1$$

Anche l'enunciato $E_1 \vee E_2 \vee E_3 \vee E_4 \vee E_5 \vee E_6$, pur non avendo la struttura di una tautologia, sarà sempre vero qualunque sia l'esito del lancio che si verifica (ogni volta che si lancia un dado l'esito è uno oppure è due oppure è tre oppure ... oppure è sei). Anche in questo caso si avrà dunque:

$$P(E_1 \vee E_2 \vee E_3 \vee E_4 \vee E_5 \vee E_6) = \frac{6}{6} = 1$$

In modo analogo, nel caso del lancio di una moneta, avremo che:

$$P(\neg E_T) = \frac{1}{2} \text{ e } P(\neg E_C) = \frac{1}{2}$$

$$P(E_T \vee E_C) = \frac{2}{2} = 1$$

$$P(E_T \vee \neg E_T) = \frac{2}{2} = 1$$

$$P(E_T \wedge E_C) = \frac{0}{2} = 0$$

$$P(E_T \wedge \neg E_T) = \frac{0}{2} = 0$$

Vediamo ora, in generale, come si comportano i connettivi nella logica della probabilità. Nel caso della *negazione* si assume che:

$$P(\neg A) = 1 - P(A)$$

Questo coincide con quanto visto negli esempi del dado e della moneta. Ad esempio:

$$P(\neg E_2) = 1 - P(E_2) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

e

$$P(\neg E_T) = 1 - P(E_T) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Si noti che, nei casi in cui $P(A)$ vale 0 oppure 1, si ha che:

P(A)	P(¬A)
1	0
0	1

Ossia, se ci si limita ai valori di probabilità 0 e 1, la negazione nella logica della probabilità si comporta come la negazione della logica classica.

Consideriamo la *congiunzione*. Definiamo *mutuamente esclusivi* due enunciati se e soltanto se non possono essere veri contemporaneamente. Nell'esempio del dado E_2 ed E_5 sono mutuamente esclusivi; non può accadere infatti che un lancio di un dado produca come esito allo stesso tempo sia 2 che 5. Certi enunciati sono mutuamente esclusivi in virtù della loro forma logica. E' il caso, ad esempio, di $A \wedge B$ e $A \wedge \neg B$. Per sincerarsene basta costruire la loro tavola di verità:

A	B	$A \wedge B$	$A \wedge \neg B$
V	V	V	F
V	F	F	V
F	V	F	F
F	F	F	F

Non c'è nessuna riga della tavola (quindi nessuna assegnazione di vero e di falso ad A e a B) per cui entrambi gli enunciati risultino veri.

Nell'esempio del dado, non sono mutuamente esclusivi enunciati come $E_1 \vee E_2$ ed $E_2 \vee E_4$. Essi infatti sono entrambi veri nel caso che l'esito di un lancio sia 2. Così come non sono mutuamente esclusivi $\neg E_3$ e $\neg E_5$. Essi sono entrambi veri in tutti i casi in cui l'esito di un lancio del dado è diverso sia da 3 che da 5.

Dati due enunciati A e B, se essi sono mutuamente esclusivi, allora si ha che:

$$P(A \vee B) = P(A) + P(B).$$

Questo concorda con quanto abbiamo constatato nell'esempio del dado. Ad esempio, E_2 ed E_5 sono mutuamente esclusivi e $P(E_2) = P(E_5) = \frac{1}{6}$, per cui, come abbiamo visto, $P(E_2 \vee E_5) = \frac{2}{6} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$.

In generale, dati A e B qualunque (cioè, non necessariamente mutuamente esclusivi), si ha che:

$$P(A \vee B) \geq P(A) \quad \text{e} \quad P(A \vee B) \geq P(B).$$

Vale inoltre che, se $P(A) = P(B) = 0$, allora $P(A \vee B) = 0$. Da questi due fatti segue che:

P(A)	P(B)	$P(A \vee B)$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Ossia, se ci si limita ai valori di probabilità 0 e 1, la disgiunzione nella logica della probabilità si comporta come la disgiunzione della logica classica.

Due enunciati A e B si dicono *indipendenti* se la probabilità di A non ha alcuna influenza sulla probabilità di B e viceversa. Ad esempio, se lancio contemporaneamente più monete (o se

lancio più volte consecutivamente una stessa moneta) l'esito di ciascuno dei lanci è indipendente dall'esito degli altri: il fatto che un lancio, ad esempio, abbia dato esito testa non influenza in alcun modo la probabilità degli esiti degli altri lanci. Lo stesso dicasi per il lancio di dadi.

Dati due enunciati A e B, se essi sono indipendenti, allora si ha che:

$$P(A \wedge B) = P(A) \cdot P(B).$$

(Si noti che, poiché P(A) e P(B) sono numeri compresi tra 0 e 1, $P(A) \cdot P(B) \leq P(A)$ e $P(A) \cdot P(B) \leq P(B)$).

Ad esempio, se lancio due volte una moneta, la probabilità che venga due volte di seguito testa è uguale a $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Lo stesso dicasi per la probabilità che al primo lancio venga testa e al secondo venga croce. Se i lanci consecutivi sono tre, la probabilità che venga tre volte testa è uguale a $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$, così come la probabilità che venga, poniamo, testa al primo lancio, croce al secondo e croce al terzo. Se tiro due volte un dado, la probabilità che venga uno al primo lancio e quattro al secondo è uguale a $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$. E così via.

In generale, dati A e B qualunque (cioè, non necessariamente indipendenti), si ha che:

$$P(A \wedge B) \leq P(A) \quad \text{e} \quad P(A \wedge B) \leq P(B).$$

Vale inoltre che, se $P(A) = 1$, allora $P(A \wedge B) = P(B)$. Da questi due fatti segue che:

P(A)	P(B)	P(A ∧ B)
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Ossia, se ci si limita ai valori 0 e 1 la congiunzione nella logica della probabilità si comporta come la congiunzione della logica classica¹.

¹ Tutti i fatti sulla logica della probabilità che abbiamo enunciato in queste pagine possono essere derivati come teoremi a partire dalle seguenti premesse:

- $P(A) \geq 0$;
- se A è una tautologia, allora $P(A) = 1$;
- se A e B sono mutuamente esclusivi, allora $P(A \vee B) = P(A) + P(B)$.

Questi tre enunciati vengono detti *Assiomi di Kolmogorov* per il calcolo della probabilità, dal nome del matematico russo che li ha scoperti. Essi non valgono solo nell'interpretazione classica della probabilità, ma anche in altre interpretazioni.

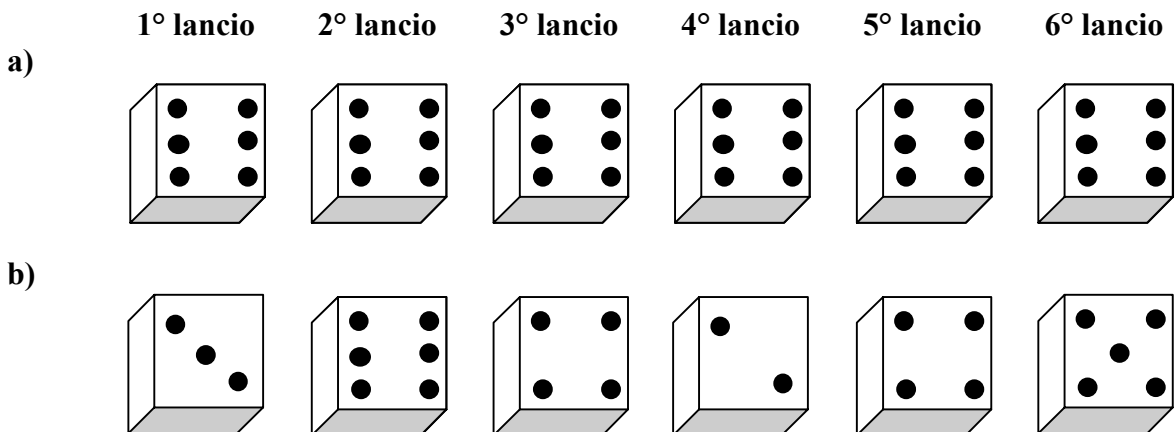
6.2 Illusioni cognitive e ragionamento probabilistico

Anche nell'ambito del ragionamento probabilistico si verificano delle "illusioni cognitive", degli errori sistematici e tenaci del tipo di quelli visti per il ragionamento di tipo deduttivo. Vediamo qualche esempio.

Supponete di effettuare sei lanci consecutivi di una moneta. Su quale di queste due sequenze di esiti scommettereste (quale cioè riterreste più probabile)?



Oppure, su quale scommettereste tra queste due sequenze di lanci di dadi?



Di fronte a queste domande moltissimi soggetti dichiarano di ritenere più probabile la sequenza b). La b) viene ritenuta più probabile perché, per il suo aspetto irregolare, è più simile all'idea che abbiamo di una sequenza "casuale". Tuttavia basta un minimo di riflessione per rendersi conto che le due sequenze sono ugualmente probabili. Nel caso della moneta, come abbiamo visto, ogni lancio è un evento indipendente dai lanci precedenti, per cui la probabilità che

si verifichi ciascuna delle due sequenze è esattamente $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64}$.

Analogamente, le due sequenze a) e b) di lanci di un dado hanno esattamente la stessa probabilità, ossia $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6^6} = \frac{1}{46656}$.

Un altro esempio di illusione cognitiva legata al ragionamento probabilistico è il seguente. Supponiamo che questa sia una foto del signor Isacco.



Supponiamo inoltre di disporre delle seguenti informazioni su di lui:

- egli porta sempre il capo coperto;
- non mangia né prosciutto né gamberi, e non prende mai il cheeseburger;
- di sabato non lavora e non viaggia;
- è circonciso.

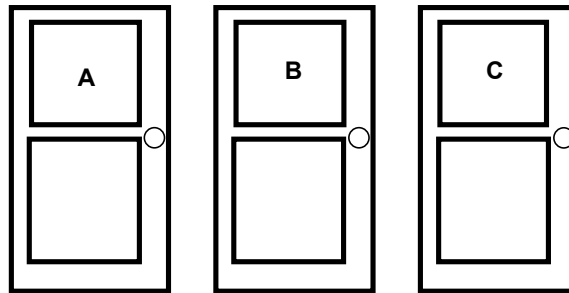
A questo punto, vi si chiede di scegliere tra i due enunciati seguenti:

A: Isacco è un ragioniere

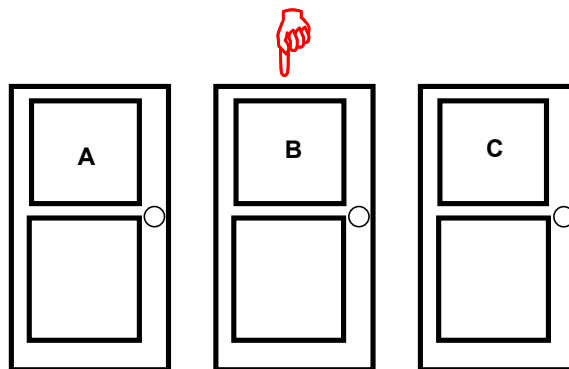
A': Isacco è un ragioniere *e* un ebreo ortodosso

Su quale dei due scommettereste? Ossia, quale dei due ritenete sia più probabile? Di fronte a scelte di questo tipo, moltissimi soggetti tendono sistematicamente a preferire A', tendono cioè a ritenere che A' sia più probabile di A. Dal punto di vista della teoria della probabilità questo è un grave errore. Infatti A' ha la forma di una congiunzione, di cui A è uno dei congiunti (A' è del tipo $A \wedge B$). Quindi, come abbiamo visto, la probabilità di A' è minore o uguale alla probabilità di A da solo. Inoltre la probabilità di A' sarebbe uguale a quella di A soltanto se la probabilità che Isacco è un ebreo ortodosso fosse uguale a 1, se cioè si avesse la certezza assoluta che Isacco è un ebreo ortodosso. Ma, date le informazioni a nostra disposizione, questo, per quanto molto verosimile, non è affatto certo. Di conseguenza, A' è strettamente meno probabile di A, e quindi conviene certamente scommettere su A.

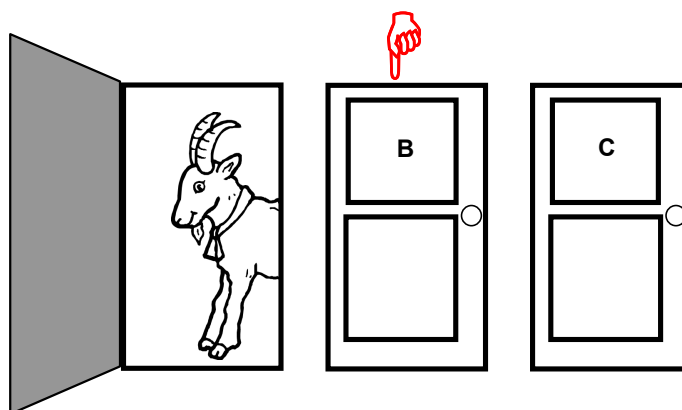
Il terzo esempio di illusione cognitiva di tipo probabilistico che riporto è molto noto. Ha anche ricevuto un nome specifico: è noto come *il dilemma di Monty Hall*. Supponete che vi siano tre porte come queste.



Dietro una delle tre porte è nascosto un premio, dietro le altre due non c'è nulla (oppure, nella versione del dilemma proposta nel corso del programma televisivo americano che gli ha dato il nome, c'è una capra). Un giocatore (che chiameremo **G**) deve indovinare dietro quale delle porte si trovi il premio. Se indovina, il premio è suo. Altrimenti non vince nulla. Un imbonitore (che chiameremo **I**) invita **G** a scegliere una delle tre porte senza aprirla. Supponiamo ad esempio che **G** scelga la porta B:



A questo punto la probabilità per **G** di avere indovinato la porta che nasconde il premio è di un terzo. Una o entrambe le porte rimanenti sono vuote o nascondono la capra. **I** (che sa dove è nascosto il premio) spalanca una delle due porte che non sono state scelte da **G**, scegliendo una porta che lui sa essere vuota (o con dietro la capra). Poniamo sia la porta A:



Ora **I** chiede a **G** se vuole continuare a puntare sulla porta B o se preferisce cambiare scelta e passare alla porta C. Quale alternativa è più conveniente per **G**? La maggior parte delle persone risponde che, dal punto di vista della probabilità, la scelta è del tutto indifferente, in quanto ci sarebbe il 50 per cento delle probabilità che il premio sia in B e il cinquanta per cento che esso sia in C, per cui tenere B o passare a C è esattamente lo stesso. Ma le cose non stanno affatto così, e

questo ragionamento è gravemente errato: in realtà ora la probabilità che il premio sia in B è sempre di $1/3$, mentre ci sono ben $2/3$ di probabilità che il premio si trovi in C. Per quanto ciò non sia affatto intuitivo, conviene di gran lunga passare a C. In questo modo infatti si raddoppiano le probabilità di vincere.

Questa affermazione può essere dimostrata rigorosamente, ma la dimostrazione è abbastanza complessa, e non disponiamo degli strumenti tecnici per effettuarla². Possiamo tuttavia giustificarla nel modo seguente.

Supponiamo che, dopo che G ha scelto la porta B, I gli faccia la seguente proposta: “Puoi decidere se continuare a puntare su B, oppure scegliere di puntare contemporaneamente su *entrambe* le porte A e C (in questo secondo caso il premio sarà tuo sia che esso si trovi in A, sia che esso si trovi in C)”. E’ chiaro a chiunque che G avrebbe tutta la convenienza ad abbandonare B per passare ad A più C. Tutti saremmo d’accordo che tenendo B la probabilità di vincere sarebbe di $1/3$, mentre passando ad A più C sarebbe di $2/3$. Nella versione originale del gioco, dopo che I ha spalancato la porta A, scegliere C dà la stessa probabilità di vincere che darebbe scegliere A e C assieme: I sa dove è il premio, e ha spalancato una porta tra A e C che sa essere vuota (o con dietro la capra). E’ come se I avesse detto a G: “Guarda, tra A e C, A è sicuramente senza il premio. Quindi se il premio fosse stato in A o in C, adesso deve essere per forza in C”. Dunque la probabilità che il premio ora sia in C è esattamente la stessa della probabilità che prima di aprire A esso fosse in A oppure in C.

Vediamo una seconda giustificazione. Supponiamo che le porte non siano tre ma cento. Chiamiamole A_1, A_2, \dots, A_{100} . Come prima, a G viene chiesto di scegliere una porta senza aprirla. Supponiamo che egli scelga la porta A_n . Ora I spalanca tutte le porte rimanenti tranne una (e tutte le porte che I spalanca sono porte che I sa essere senza il premio). Sia A_m la porta che I non apre. A G converrebbe mantenere la vecchia scelta (cioè la porta A_n) oppure passare ad A_m ? In questo caso è chiaro che la scelta più conveniente è passare ad A_m . E’ intuitivo che tenendo A_n la probabilità di vincere è di $1/100$, mentre passando ad A_m è di ben $99/100$. Ma la struttura del problema è esattamente la stessa che di quella del dilemma di Monty Hall; cambia solo il numero delle porte.

Se neppure queste argomentazioni vi hanno convinto, un’ulteriore possibilità consiste nel vedere empiricamente cosa succede provando a ripetere il gioco molte volte. Siccome giocare davvero è abbastanza complicato, può essere utile disporre di un programma che simuli il gioco. Un programma del genere si trova a questo indirizzo Internet:

<http://www.shodor.org/interactivate/activities/monty3/index.html>

Se vi collegherete a questo sito potrete giocare ripetutamente molte partite, decidendo ogni volta quale strategia utilizzare (se cioè mantenere la vostra scelta iniziale oppure cambiarla). Il programma riporta le percentuali delle vittorie ottenute con ciascuna strategia. Dopo aver giocato un buon numero di partite potrete constatare che con la prima strategia si ottiene circa il 33% di vittorie, con la seconda circa il 66%. All’indirizzo:

<http://www.shodor.org/interactivate/activities/montynew/index.html>

c’è una versione del gioco che consente di scegliere il numero delle porte. Infine, con la versione del programma che si trova a questo indirizzo:

<http://www.shodor.org/interactivate/activities/monty/>

si può simulare un grande numero di giocate (potendo decidere, anche in questo caso, il numero delle porte).

² Essa può essere dimostrata a partire da un importante risultato di teoria della probabilità noto come *Teorema di Bayes*.

7. Ragionamento induttivo

Nella premessa di questi appunti abbiamo visto, tra i vari tipi di ragionamento, un esempio di ragionamento induttivo:

*Tutti i cigni osservati sino ad ora in Europa sono bianchi.
Tutti i cigni osservati sino ad ora in Nord America sono bianchi.
Tutti i cigni osservati sino ad ora in Sud America sono bianchi. [...]
Non sono stati mai osservati cigni che non fossero bianchi.
Quindi: Tutti i cigni sono bianchi.*

In questo genere di ragionamenti si parte da premesse che riguardano un certo numero di casi particolari per giungere ad una conclusione di tipo generale. Non si tratta di inferenze logicamente corrette, in quanto le premesse non coprono tutti i casi possibili. E' quindi sempre possibile che nuovi dati portino a falsificare la conclusione. Ad esempio, è possibile che un giorno venga osservato un cigno che non è bianco; in tal caso la conclusione del precedente ragionamento dovrà essere ritrattata.

In questo paragrafo prenderemo in considerazione due tipi di ragionamenti induttivi, le *generalizzazioni statistiche* (par. 7.1) e le *generalizzazioni induttive* in senso stretto (par. 7.2).

7.1 Generalizzazioni statistiche

Indichiamo col termine *generalizzazioni statistiche* dei ragionamenti che hanno una struttura di questo genere:

*Su un campione casuale di m individui che sono dei P , l' n per cento sono dei Q
Quindi: Circa l' n per cento dei P sono Q*

dove P e Q sono due proprietà. Vale a dire: si sceglie un campione casuale di individui che godono della proprietà di essere un P ; si constata che una certa percentuale n di quegli individui gode anche della proprietà di essere un Q , e si generalizza tale osservazione all'intera popolazione degli individui che sono dei P (con l'importante cautela che tale generalizzazione non può essere esatta in modo assoluto: la conclusione afferma che circa l' n per cento dei P sono Q).

Questo tipo di generalizzazioni sono largamente utilizzate nelle scienze umane, e sono quelle che vengono usate per sondaggi, *exit poll*, analisi di mercato, eccetera.

Un esempio di ragionamento di questo tipo è il seguente:

*Dato un campione casuale di 100.000 famiglie italiane, il 15% possiede due automobili
Quindi: Circa il 15% delle famiglie italiane possiede due automobili*

Qui la proprietà P è "essere una famiglia italiana" e la proprietà Q è "possedere due automobili". Nell'esempio:

*Dato un campione casuale di 100.000 elettori, il 47% ha deciso di votare sì al referendum
Quindi: Circa il 47% degli elettori ha deciso di votare sì al referendum*

la proprietà P è "essere un elettore" e la proprietà Q è "aver deciso di votare sì al referendum".

L'affidabilità di una generalizzazione statistica dipende dal fatto che il campione sia abbastanza numeroso, e che inoltre sia scelto in maniera tale da essere realmente casuale. Un

campione casuale è un campione tale per cui *ogni individuo della popolazione dei P deve avere la stessa probabilità di essere scelto a farne parte.*

Ad esempio, le seguenti non sono generalizzazioni statistiche affidabili perché il campione su cui si basano non è né casuale né abbastanza numeroso:

Il 30% dei miei amici ama il jazz d'avanguardia

~~**Quindi:** Circa il 30% delle persone ama il jazz d'avanguardia~~

Il 90% dei miei amici voterà sì al referendum

~~**Quindi:** Circa il 90% degli elettori voterà sì al referendum~~

Infatti in primo luogo l'insieme dei miei amici (per quanti amici io possa avere) non è abbastanza numeroso per garantire questo tipo di generalizzazioni; inoltre non si tratta neppure di un campione casuale, perché nel gruppo degli amici di una persona tendono a prevalere certe caratteristiche piuttosto che altre (dal punto di vista anagrafico, geografico, sociale, culturale, professionale, politico, eccetera): se ad esempio frequento dei club di fanatici di jazz, la percentuale di estimatori del jazz di avanguardia sarà più alta tra i miei amici che tra altre categorie di persone.

Una generalizzazione come:

Dato un campione casuale di 26 italiani, il 30% odia il vino rosso

~~**Quindi:** Circa il 30% degli italiani odia il vino rosso~~

non è affidabile perché il campione (per quanto possa essere impeccabile dal punto di vista della del modo in cui è stato scelto) è decisamente troppo poco numeroso. Mentre questo esempio:

Dato un campione di 100.000 elettori iscritti alla CGIL, il 76% ha deciso di votare sì al referendum

~~**Quindi:** Circa il 76% degli elettori ha deciso di votare sì al referendum~~

non costituisce una generalizzazione affidabile in quanto il campione non è casuale (gli iscritti a un dato sindacato condividono una certa impostazione politica, per cui è scorretto proiettare le loro scelte elettorali su tutta la popolazione degli elettori).

La difficoltà principale nelle generalizzazioni di tipo statistico consiste nell'individuazione del campione appropriato. Una volta che si dispone del campione esistono tecniche matematiche consolidate che consentono di ottenere generalizzazioni attendibili.

7.2 Generalizzazioni induttive in senso stretto

Una *generalizzazione induttiva in senso stretto* è un ragionamento della forma:

(*) *Tutti i P osservati sino ad ora sono dei Q*

~~**Quindi:** Tutti i P sono dei Q~~

Le generalizzazioni induttive possono assumere anche una forma probabilistica del tipo:

L'n per cento dei P osservati sino ad ora sono dei Q

~~**Quindi:** Circa l'n per cento dei P sono dei Q~~

La differenza tra generalizzazioni statistiche e generalizzazioni induttive in senso stretto è la seguente. Abbiamo visto che le generalizzazioni statistiche richiedono l'individuazione di un

campione casuale di individui della popolazione che si intende studiare, dove con campione casuale si intende un campione tale per cui ogni *individuo della popolazione ha la stessa probabilità di essere scelto a farne parte*. Tuttavia non sempre è possibile garantire un campione causale in questo senso, in quanto non sempre è possibile accedere a tutta la popolazione. Parte della popolazione può essere inaccessibile per ragioni geografiche (ad esempio oggetti che si trovano fuori dal sistema solare), oppure la generalizzazione può riguardare eventi passati o futuri, e così via.

Supponiamo di voler usare l'induzione per ricavare leggi fisiche. Le leggi fisiche (come ad esempio: *l'acqua ghiaccia a 0 gradi centigradi*, o *il sale è solubile nell'acqua*) non riguardano solo fenomeni attuali e accessibili, ma anche fenomeni passati e futuri, e in generale tutti quei fenomeni che per ragioni di fatto o di principio non potranno mai essere osservati direttamente. Ad esempio quando si afferma che l'acqua ghiaccia a 0 gradi centigradi si intende parlare anche di quello che accadeva al tempo dell'antica Roma, o nel Giurassico, e anche quei campioni di ghiaccio completamente inaccessibili che si trovano sepolti al centro dell'Artide, o che si trovano su corpi celesti di altre galassie.

A questo punto è evidente che non potremo mai disporre, ad esempio, di un campione veramente casuale di esemplari di sale nel senso sopra specificato (nel senso cioè che ogni esemplare di sale ha la stessa probabilità di entrare a farne parte). Per formulare le nostre generalizzazioni induttive abbiamo a accesso solo a un numero molto limitato di esemplari. Pertanto nelle generalizzazioni induttive si abbandona la richiesta che il punto di partenza della generalizzazione sia un campione casuale di individui nel senso sopra specificato.

Come si fa ad essere ragionevolmente sicuri che le conclusioni che si traggono dal campione limitato degli esemplari che si hanno a disposizione possano essere estese a tutta la popolazione di cui si sta parlando? Quando si fanno inferenze di questo genere si assume implicitamente che ci siano delle regolarità del dominio che si intende studiare, ossia, come si dice talvolta, che esistano delle regolarità in natura. Ad esempio, quando il fisico formula una legge generale a partire da un numero limitato di campioni lo fa basandosi sulla fiducia che il mondo fisico si comporti più o meno sempre nello stesso modo, e che le cose non cambino arbitrariamente.

Giustificare l'induzione in questo modo tuttavia è fonte di difficoltà filosofiche che furono messe in luce nel '700 dal filosofo scozzese David Hume. In estrema sintesi il problema di Hume è il seguente: come possiamo giustificare la nostra fiducia che esistano delle regolarità in natura? Non certo su base induttiva (con un generalizzazione del tipo: *Ho sempre osservato che la natura si comporta in maniera regolare; quindi: la natura si comporta sempre in maniera regolare*) perché abbiamo bisogno della tesi che esistono regolarità in natura per giustificare l'affidabilità dell'induzione, e se usassimo l'induzione per giustificare la nostra fiducia nella tesi della regolarità della natura entreremmo in un circolo vizioso. Come allora?

Una versione recente del problema di Hume, formulata in termini linguistici, è stata individuata nel secolo scorso dal filosofo americano Nelson Goodman. Vediamo di cosa si tratta. Tra tutti i predicati che possiamo formulare con il linguaggio ve ne sono alcuni che ci appaiono per così dire "sensati", come ad esempio:

essere un mammifero
essere un numero primo
essere francese

e altri che invece che invece sono decisamente più bizzarri, come:

avere sulla testa un numero dispari di capelli
essere figlio di una calabrese e di un impiegato del catasto
essere un numero pari diverso dai multipli dell'età dell'attuale pontefice
essere un vertebrato nato in Asia oppure una pianta erbacea
comparire sulla guida telefonica di Milano dell'anno 1965 tra la pagina 89 e la pagina 127

Dal punto di vista delle inferenze deduttive logicamente corrette tutti i predicati si comportano nello stesso modo, sia quelli “sensati” del primo gruppo, sia quelli “bizzarri” del secondo. Ad esempio la regola:

Tutti gli oggetti che hanno la proprietà P hanno la proprietà Q
L'oggetto a ha la proprietà P
Quindi: *L'oggetto a ha la proprietà Q*

è corretta qualunque predicato io sostituisca a *P* e a *Q* (siano essi “sensati” o meno). La seguente inferenza:

Tutti coloro che hanno un numero di capelli uguale a un numero primo maggiore di 7 hanno un numero dispari di capelli
Mario ha un numero di capelli uguale a un numero primo maggiore di 7
Quindi: *Mario ha un numero dispari di capelli*

è logicamente corretta e del tutto ineccepibile.

Per quanto riguarda altre forme di ragionamento (ad esempio il ragionamento induttivo) non è così, i predicati non sono tutti uguali. Ad esempio i seguenti ragionamenti hanno la struttura dello schema (*) all'inizio di questo sottoparagrafo, e la loro premessa è vera. Tuttavia la conclusione che si ottiene non è accettabile.

Tutti i pinguini osservati sino ad ora sono vissuti negli ultimi 5 secoli
Quindi: *Tutti i pinguini sono vissuti negli ultimi 5 secoli*

Tutti i fossili osservati sino ad ora sono stati estratti dal loro giacimento
Quindi: *Tutti i fossili saranno estratti dal loro giacimento*

Tutta l'acqua osservata sino ad oggi si trova in una certa porzione del cosmo
Quindi: *Tutta l'acqua si trova in quella porzione del cosmo*

Vi sono dunque dei predicati che consentono generalizzazioni induttive accettabili e altri che non le consentono. Chiamiamo *proiettabili* i predicati del primo tipo. Nelson Goodman ha formulato un esempio di predicato non proiettabile che è diventato celebre. Si tratta del predicato *vlu* (*grue* in inglese, da *gr*[een] + *[bl]ue*) definito come segue:

Un oggetto *x* è *vlu* se e solo se *x* è stato esaminato fino al 31 dicembre 2003 ed è verde, oppure *x* viene esaminato dopo il 31 dicembre 2003 ed è blu.

E' evidente che un predicato come *vlu* non può essere utilizzato in generalizzazioni induttive basate sullo schema (*). Ad esempio, tutti gli smeraldi osservati fino alla sera del 31 dicembre 2003 sono *vlu*. Quindi, applicando lo schema (*), si potrebbe concludere che “Tutti gli smeraldi sono *vlu*”. Ma questa conclusione verrebbe immediatamente falsificata la prima volta che uno smeraldo venisse osservato dopo la mezzanotte del 31 dicembre: dopo tale data gli smeraldi cessano di essere *vlu*.

I predicati proiettabili sono quelli che, in un certo senso, esprimono delle proprietà che corrispondono a delle regolarità del mondo naturale. Ma a questo punto si pone un problema simile a quello di Hume. Come si fa a distinguere tra predicati che sono proiettabili e predicati che non lo sono? Una risposta generale è definitiva non è disponibile. Qui basti ricordare questa importante

differenza tra inferenze logicamente corrette e generalizzazioni induttive: per queste ultime non tutti i predicati si comportano allo stesso modo.

7.3 Fallacie induttive

Per finire, vediamo alcuni esempi di *fallacie induttive* ricordate nella letteratura, ossia di fallacie relative a forme di ragionamento di tipo induttivo o probabilistico.

- **Generalizzazione azzardata**

Si tratta di una generalizzazione di tipo statistico o induttivo tratta a partire da una base di evidenza decisamente insufficiente. Ad esempio:

Ho comprato tre gerani e li ho messi sul mio balcone.

Nel giro di un mese sono morti tutti.

Quindi: ~~*Sul mio balcone non c'è un clima adatto per i gerani.*~~

L'evidenza a partire dalla quale è stata effettuata la generalizzazione è troppo limitata per trarre quella conclusione. I gerani potrebbero essere morti per mille ragioni diverse dal clima del mio balcone; ad esempio perché chi me li ha venduti mi ha imbrogliato, oppure perché non sono capace di accudirli.

Oppure:

Non conosco nessuno che voti no al referendum.

Quindi: ~~*Probabilmente vincerà il sì.*~~

(Si vedano le considerazioni sulle generalizzazioni statistiche fatte nel par. 7.1).

Un altro esempio di generalizzazione azzardata è il seguente, in cui non solo l'evidenza da cui si parte è troppo limitata, ma i fenomeni considerati sono così eterogenei tra loro da non costituire in alcun modo un buon punto di partenza per una generalizzazione.

Il mese scorso ho incontrato O. e sono scivolato su una buccia di banana.

Due settimane fa O. mi ha telefonato e a momenti finivo sotto una macchina.

Ieri ho incontrato O. e ho perso 50 euro dal portafogli.

Quindi: ~~*O. porta scalogna.*~~

(Detto in altri termini: *portare scalogna* non è un buon candidato a essere un predicato proiettabile).

- **Fallacia del giocatore**

E' un tipo di fallacia che si basa sulla credenza errata che, in una sequenza di eventi indipendenti, l'esito degli eventi precedenti possa influenzare l'esito degli eventi successivi. Si tratta di una fallacia tipica del giocatore d'azzardo ingenuo. Questo è un esempio tratto dal gioco del lotto:

Da più di cento estrazioni il 23 non esce sulla ruota di X.

Quindi: ~~*Presto il 23 uscirà sulla ruota di X.*~~

Oppure, nel caso di un giocatore di roulette:

Sono cinque volte di seguito che esce un numero rosso.

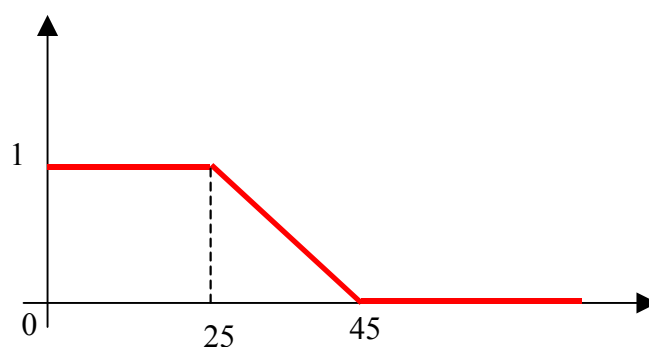
Quindi: *Conviene puntare sul nero.*

In entrambi i casi la probabilità di un evento non è influenzata dagli eventi precedenti. Nel primo caso a ogni estrazione la probabilità che esca 23 è esattamente la stessa, ed è uguale a $1/90$; nel secondo caso la probabilità che esca rosso (o nero) è sempre un po' meno di un mezzo (perché c'è lo zero che non è né rosso né nero; per la precisione la probabilità che esca rosso – o nero – è di $18/37$, e di $18/38 = 9/19$ nella roulette americana dove c'è anche il doppio zero).

8. Logica fuzzy

Tutti i predicati che abbiamo preso in considerazione sino ad ora si applicano, per così dire, in maniera “tutto o niente”: qualcosa o è un cane o non lo è, un numero è pari o non lo è; non ha senso dire che un certo individuo è un cane (o che è un numero pari) soltanto a un certo grado. Non tutti i predicati però si comportano in questo modo. Consideriamo ad esempio predicati come *giovane*, *anziano*, *grande*, *piccolo*, *alto*, *veloce*, *nuovo*. In casi come questi non c'è un confine netto tra gli individui cui il predicato si applica e quelli cui il predicato non si applica. Prendiamo in considerazione il predicato *giovane* (applicato a esseri umani). Una persona di vent'anni è certamente giovane, una persona di ottanta certamente non lo è. Ma a che età una persona smette di essere giovane? Non è plausibile individuare un confine preciso. Si smette di essere giovani un po' alla volta. Per cui per enunciati come *Mario è giovane* è poco plausibile assumere il principio di bivalenza (secondo cui un enunciato non può essere altro che vero o falso). *Mario è giovane* smette di essere vero un po' alla volta (proprio come Mario smette un po' alla volta di essere giovane). Un modo per trattare questo tipo di enunciati è quello di assumere che esistano valori di verità intermedi tra il vero e il falso. Questa via è impiegata in un tipo di logiche che sono dette *logiche sfumate* (o, in inglese, *logiche fuzzy*). Predicati come quelli menzionati sopra vengono chiamati *predicati fuzzy*.

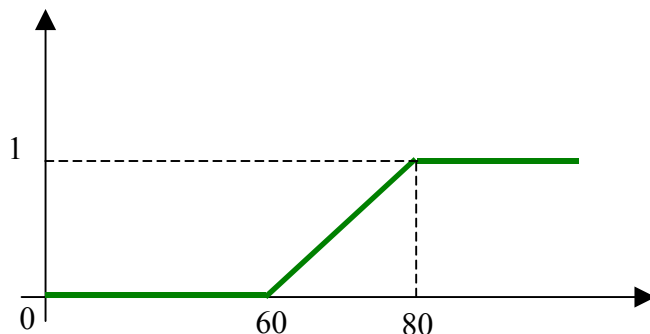
Nelle logiche fuzzy i valori di verità degli enunciati vengono espressi come numeri reali compresi tra 0 e 1. Il valore di verità 0 corrisponde al falso, il valore di verità 1 corrisponde al vero, gli altri numeri sono valori intermedi tra il vero e il falso. Ad esempio un enunciato, con valore di verità 0.93 sarà quasi vero, uno con valore 0.12 sarà quasi falso, uno con valore 0.48 sarà per così dire a metà strada tra il vero e il falso, e così via. Il valore di verità degli enunciati è determinato a partire dal modo in cui funzionano i predicati fuzzy. Ad esempio, un predicato come *giovane* avrà un comportamento del tipo di quello mostrato dal seguente diagramma.



Sull'asse delle ascisse è rappresentata l'età, sull'asse delle ordinate l'intervallo dei valori di verità. Il diagramma si legge in questo modo. Assumiamo che una persona *a* fino ai venticinque anni sia da considerare giovane a tutti gli effetti. Per cui, se *a* ha meno di venticinque anni, allora

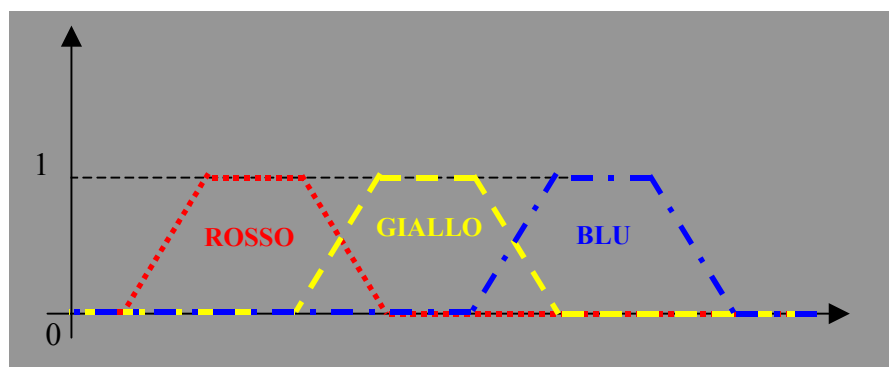
$giovane(a)$ avrà valore di verità 1. Una persona che ha più di quarantacinque anni è da considerare a tutti gli effetti non più giovane. Per cui, se a ha più di quarantacinque anni, allora $giovane(a)$ avrà valore di verità 0. Per le età intermedie, il valore di verità di $giovane(a)$ seguirà l'andamento della curva.

Analogamente, un predicato come anziano avrà un andamento di questo tipo:



Chi ha meno di sessant'anni non è anziano, chi ne ha più di ottanta è anziano a tutti gli effetti, per i casi intermedi la proprietà essere anziano cresce in maniera graduale.

Anche i predicati di colore sono predicati fuzzy: non c'è un salto netto tra ciò che è, poniamo, giallo e ciò che non lo è. I colori sfumano in maniera graduale dal giallo all'arancione da una parte, e dal giallo al verde e al blu dall'altra. La struttura fuzzy dei predicati di colore potrebbe pertanto essere rappresentata più o meno come in questo grafico, dove l'asse delle ascisse corrisponde alla lunghezza d'onda della luce..

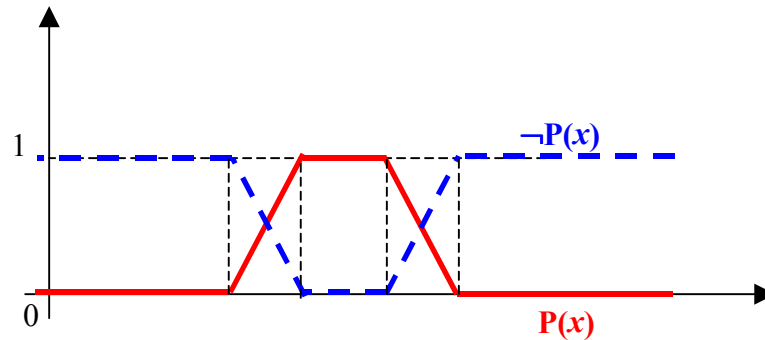


La logica fuzzy è stata sviluppata a partire dagli anni '70 nel contesto di applicazioni di tipo informatico, per rappresentare tipi di conoscenza e modellare sistemi difficili da trattare con gli strumenti tradizionali. Ci sono delle somiglianze con la logica della probabilità. Ad esempio, sia in quest'ultima che nella logica fuzzy i valori di verità degli enunciati variano nell'intervallo dei numeri compresi tra 0 e 1. Tuttavia gli obiettivi di questi due tipi di logica sono diversi. Nel caso della logica della probabilità i valori intermedi tra 0 e 1 vengono usati per rappresentare il fatto che si ha una conoscenza incompleta del verificarsi o meno di certi eventi: prima di lanciare una moneta non so se verrà testa oppure croce. So soltanto che i due eventi hanno pari probabilità, quindi gli attribuisco valore 1/2. Tuttavia una volta che il lancio è stato effettuato o l'esito è stato testa, oppure esso è stato croce. Non sono possibili casi intermedi, non c'è nulla di sfumato in tutto ciò. Se invece so che Giorgio ha 65 anni e voglio esprimere il fatto che egli è anziano soltanto a un certo grado, questo non ha a che fare con una mia mancanza di conoscenza sullo stato del mondo. Il problema non ha a che fare col fatto che non sono certo di qualche informazione. Si tratta piuttosto di come trattare un aspetto di come funziona del predicato $giovane$.

Vediamo come possono essere definiti i connettivi in una logica fuzzy. La *negazione* viene definita come segue:

$$\neg A = 1 - A$$

Ossia, il valore di verità fuzzy di un enunciato $\neg A$ viene ottenuto sottraendo da uno il valore di verità dell'enunciato A . Così se A vale 0 $\neg A$ vale 1, se A vale 1 $\neg A$ vale 0, se A vale 0.25 $\neg A$ vale 0.75, e così via. Di conseguenza, se il predicato $P(x)$ ha l'andamento indicato dalla linea continua in questo grafico:



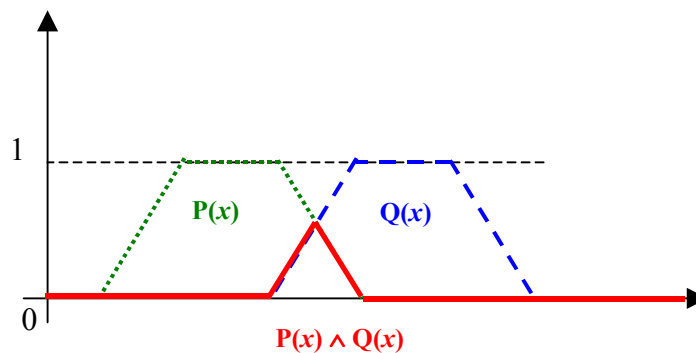
Il predicato $\neg P(x)$ ha l'andamento indicato dalla linea tratteggiata.

Per definire la congiunzione e la disgiunzione è possibile scegliere tra diverse alternative. Presenterò qui la più semplice, che consiste nel definire la congiunzione e la disgiunzione di due enunciati rispettivamente come il minimo e il massimo tra i valori dei due enunciati.

Vale a dire, nel caso della *congiunzione*, si ha che:

$$A \wedge B = \text{Min} \{A, B\}$$

Per cui se A vale 0 e B vale 1, $A \wedge B$ varrà 0, se A vale 0.75 e B vale 0.62 $A \wedge B$ varrà 0.62, e così via. Di conseguenza, se i predicati $P(x)$ e $Q(x)$ hanno l'andamento rappresentato dalle linee tratteggiate in questo grafico:

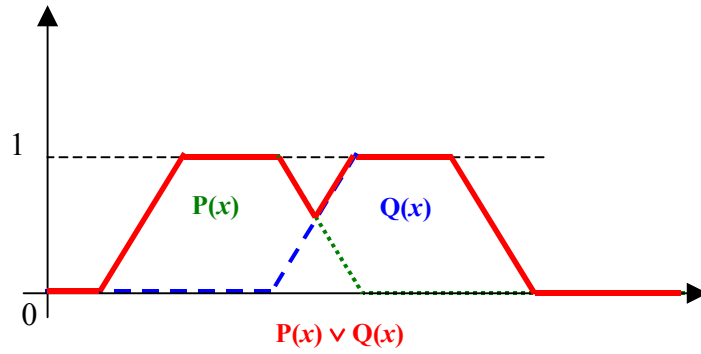


il predicato $P(x) \wedge Q(x)$ ha l'andamento rappresentato dalla linea continua.

Nel caso della *disgiunzione*, la si definisce come:

$$A \vee B = \text{Max} \{A, B\}$$

Per cui se A vale 0 e B vale 1, $A \vee B$ varrà 1, se A vale 0.75 e B vale 0.62 $A \vee B$ varrà 0.75, e così via. Di conseguenza, se i predicati $P(x)$ e $Q(x)$ hanno l'andamento rappresentato dalle linee tratteggiate in questo grafico:



il predicato $P(x) \vee Q(x)$ ha l'andamento rappresentato dalla linea continua.

Si noti che, in base a queste definizioni, se ci si limita a enunciati che hanno come valori di verità 0 e 1, si ottengono le stesse tavole di verità della logica proposizionale classica (come avevamo già constatato anche nel caso della logica della probabilità).

FINE DEGLI APPUNTI