Contesti di credenza e onniscienza logica

Marcello Frixione

Frege in "Senso e significato" mise in luce come il principio di sostituibilità *salva veritate* fallisca nel discorso indiretto: se nell'enunciato (vero) "Galileo dice che la terra gira" sostituisco "la terra gira" con un altro enunciato avente lo stesso riferimento (ossia, lo stesso valore di verità), non è detto che l'enunciato che ottengo sia ancora vero. Ad esempio, "l'acqua ha composizione chimica H_2O" ha lo stesso riferimento di "la terra gira" (sono entrambi veri). Ma "Galileo dice che l'acqua ha composizione chimica H_2O" è presumibilmente falso. La soluzione proposta da Frege consiste nell'assumere che, nel discorso indiretto, "le parole non hanno il loro significato [*Bedeutung*] ordinario, ma stanno per quello che solitamente è il loro senso. Per brevità diremo che nel discorso indiretto le parole vengono usate *indirettamente*, ovvero hanno un significato indiretto" (Frege 1892, p. 35 della trad. it.). Ossia, le espressioni linguistiche nel discorso indiretto non denotano quello che è il loro usuale riferimento, bensì il loro senso. La ragione, da un certo punto di vista, è intuitiva: in un enunciato come "la terra gira" ci si riferisce alla terra e, asserendolo, ci si impegna sulla sua verità; in un enunciato come "Galileo dice che la terra gira" non ci si riferisce alla terra, bensì a ciò che ha detto Galileo, al pensiero che egli ha espresso. Perciò nel secondo enunciato l'espressione "la terra gira" non si riferisce al suo riferimento usuale, ma al suo senso.

Considerazioni di questo tipo non valgono solo per il discorso indiretto in senso stretto. Il principio di sostituibilità *salva veritate* fallisce anche per altri tipi di *contesti indiretti*, quali ad esempio i contesti epistemici (quelli generati da verbi come *sapere* o *credere*)[1], i contesti modali aletici (quelli generati da espressioni come *è possibile che* o *è necessario che*), i contesti deontici (quelli generati da espressioni come *è obbligatorio* o *è lecito*), i controfattuali, i contesti temporali, e così via.

La soluzione di Frege fu criticata da Carnap (1947), in quanto comporterebbe una proliferazione di entità semantiche diverse (nei contesti indiretti le espressioni linguistiche dovrebbero avere un senso indiretto, e così via). La soluzione proposta da Carnap tuttavia è in un certo senso parente di quella fregeana: egli propone di modificare il principio di sostituibilità *salva veritate*, per così dire contestualizzandolo: in un contesto indiretto sono sostituibili *salva veritate* quelle espressioni che hanno non lo stesso riferimento, bensì la stessa intensione (assumo qui per semplicità che la nozione carnapiana di intensione possa essere considerata una ricostruzione razionale della nozione fregeana di senso).

La proposta di Carnap è stata alla base dell'estensione della semantica modellistica al trattamento delle logiche modali, che, a partire dalla semantica per la logica modale sviluppata in *Meaning and Necessity*, ha portato allo sviluppo della semantica intensionale kripkeana dei mondi possibili e alla sua generalizzazione nella logica intensionale di Montague.

Anche la semantica kripkeana dei mondi possibili tuttavia fallisce nel caso dei contesti di credenza, in cui in generale espressioni di uguale intensione non risultano sostituibili *salva veritate*. A ciò è legato il problema dell'*onniscienza logica*, ossia il problema di individuare modelli logici del ragionamento epistemico in cui le credenze dei soggetti non siano chiuse rispetto alla relazione di conseguenza logica. In questo capitolo verranno presentate alcune proposte per sviluppare modelli del ragionamento epistemico che superino tali difficoltà. Le analisi alla base di tali proposte mettono in luce come la mancanza di onniscienza logica e il fallimento della sostituibilità *salva veritate* di espressioni equiintensionali nei contesti epistemici siano fenomeni complessi, che devono essere ricondotti a cause diverse.

---

[1] Talvolta il termine *contesti epistemici* viene riservato ai soli contesti di conoscenza, mentre per i contesti di credenza si parla di contesti *doxastici*. Qui tuttavia indicherò come contesti epistemici sia gli uni che gli altri.

1. Contesti indiretti, mondi possibili e logiche della credenza[2]

L'idea che sta alla base della semantica dei mondi possibili per le logiche modali così come è stata sviluppata da Saul Kripke[3] consiste nel prendere in considerazione, per la valutazione degli enunciati in cui compaiono operatori modali, stati di cose diversi dal mondo reale. Tali stati di cose vengono detti appunto *mondi possibili* (nel seguito userò talvolta più semplicemente l'espressione *mondi*). Nel caso delle logiche modali aletiche, un mondo possibile può essere concepito come una situazione controfattuale, ossia come uno stato di cose alternativo rispetto al mondo reale (ovviamente anche il mondo reale è un mondo possibile). Gli enunciati necessariamente veri sono quegli enunciati che, oltre a essere veri nel mondo reale, sono veri anche in tutti i mondi possibili che si possono concepire nel mondo reale.

Nella semantica di Kripke questa idea è formalizzata per mezzo di strumenti insiemistici. I mondi possibili sono elementi w di un insieme W di mondi. Poiché ciascun $w \in W$ corrisponde a un possibile stato di cose, ogni w comporta l'assegnazione di un valore di verità (vero o falso) a ciascuno degli enunciati atomici del linguaggio. (Dato che nel seguito ci occuperemo esclusivamente di logica proposizionale, possiamo identificare gli enunciati atomici con lettere enunciative p, q, …). Un aspetto importante è che i mondi possibili corrispondono a stati *completi* e *coerenti* dell'universo. Vale a dire, ciascun mondo assegna *uno e un solo* valore di verità a ogni lettera enunciativa del linguaggio. Non può accadere cioè che in un mondo a una lettera enunciativa non sia assegnato alcun valore di verità, così come non può accadere che un mondo sia incoerente, ossia che assegni alla stessa lettera enunciativa valori di verità diversi.

Nella semantica dei mondi possibili un enunciato del tipo "è necessario che α"[4] (in simboli, $L\alpha$) è vero rispetto a un mondo w se e solo se α è vera in tutti i mondi possibili che sono *accessibili* da w, cioè, intuitivamente, in tutti quei mondi possibili che possono essere concepiti nel mondo w.

Quali siano i mondi possibili che possono essere concepiti a partire da un mondo w viene formalizzato introducendo una *relazione R di accessibilità* tra mondi. R è appunto una relazione tra mondi, vale a dire è un sottoinsieme del prodotto cartesiano $W \times W$, dove W è l'insieme di tutti i mondi possibili. Dato un mondo w, sono accessibili da w tutti quei mondi w' tali che $R(w, w')$. Quindi, una formula $L\alpha$ è vera nel mondo w se e solo se α è vera in tutti i w' tali che $R(w, w')$.

Ponendo restrizioni diverse sulla relazione di accessibilità (imponendo ad esempio che essa sia transitiva, oppure riflessiva, euclidea, eccetera) si ottengono logiche modali differenti, in cui risultano valide formule modali diverse[5]. La logica modale più debole basata sulla semantica di Kripke è quella in cui si assume che R possa essere una relazione qualunque. Tale logica viene detta **K**. In essa risultano valide tutte le formule del tipo:

$$\text{(AD) } L\alpha \wedge L(\alpha \to \beta) \to L\beta$$

La formula (AD) (di solito usata come assioma per **K**) viene detta abitualmente *assioma distributivo*. Essa risulta valida perché, dato un qualsiasi mondo w, vale quanto segue:

[2] In questo capitolo mi occuperò soltanto di un aspetto specifico relativo ai contesti di credenza, ossia il problema dell'onniscienza logica, legato a sua volta alla sostituibilità *salva veritate* di enunciati nei contesti epistemici. Lo studio dei contesti di credenza coinvolge moltissimi altri aspetti, quali ad esempio il ragionamento sulla conoscenza, l'interazione tra agenti, i rapporti con la teoria dei giochi, i rapporti tra ragionamento epistemico e inferenze non monotòne. In (Fagin *et al.* 1995) e (Levesque e Lakemeyer 2001) sono trattati vari di questi temi. Un punto di riferimento sui diversi aspetti della ricerca sui contesti di credenza sono i convegni *TARK – Theoretical Aspects of Rationality and Knowledge* (http://www.tark.org/); (Gilboa 1998) e (van Benthem 2001) sono gli atti delle ultime due edizioni.

[3] (Kripke 1963); sulla semantica di Kripke per le logiche modali cfr. ad es. Chellas (1980) e Hugues e Cresswell (1996).

[4] Seguirò la convenzione di indicare con lettere greche minuscole (α, β, …) formule generiche, mentre indicherò con lettere latine minuscole (p, q, …) specifiche lettere enunciative.

[5] Si vedano ad esempio Chellas (1980) e Hugues e Cresswell (1996).

(a) se $L\alpha$ è vera in w, allora α è vera in tutti i mondi w' accessibili da w;

(b) se $L(\alpha \to \beta)$ è vera in w, allora in tutti i mondi w' accessibili da w è vera $\alpha \to \beta$; cioè, in tutti i mondi w' accessibili da w, α è falsa oppure β è vera.

Da (a) e da (b) segue che, se in w sono vere $L\alpha$ e $L(\alpha \to \beta)$, allora β è vera in tutti i mondi w' accessibili da w, per cui $L\beta$ è vera in w.

In **K** si ha inoltre che, se α è una formula valida, risulta valida anche $L\alpha$. Questo perché, se α è valida, allora α è vera in tutti i mondi di W. Quindi, dato qualunque mondo w, si avrà che α è vera in tutti i mondi possibili accessibili da w. Su questo si basa la *regola di necessitazione*:

$$\frac{\alpha}{L\alpha}$$

Ossia, se è possibile derivare α utilizzando esclusivamente assiomi logici, allora è possibile derivare $L\alpha$.

Poiché **K** è la logica più debole basata sulla semantica di Kripke, ne segue che assioma distributivo e regola di necessitazione valgono in tutte le logiche modali basate su questo tipo di semantica[6].

Sia $\{\mathbf{v}, \mathbf{f}\}$ l'insieme dei valori di verità vero e falso. Possiamo definire l'*intensione* di una formula α come una funzione di tipo $W \to \{\mathbf{v}, \mathbf{f}\}$, ossia una funzione che associa a ciascun mondo possibile in W un valore di verità. In particolare, l'intensione di α sarebbe una funzione che, per ciascun mondo w_i preso come argomento, produce come valore **v** se α è vero in w_i, e produce **f** se α è falsa in w_i. In modo del tutto analogo, si può identificare l'intensione di α con l'insieme dei mondi w_i in cui α è vera; dato un enunciato α, indicherò con $Int(\alpha)$ tale insieme.

In base a questa definizione, si può constatare che due enunciati sono sostituibili *salva veritate* in un contesto modale aletico se hanno la stessa intensione, rispettando così l'intuizione carnapiana. La definizione di intensione di un enunciato come funzione da mondi possibili a valori di verità può essere generalizzata ad altre categorie sintattiche. Ad esempio, l'intensione di un termine individuale può essere vista come un funzione da mondi possibili a individui del dominio, l'intensione di un simbolo predicativo ad un argomento come una funzione da mondi possibili a sottoinsiemi del dominio, e così via. In generale, l'intensione di un'espressione può essere vista come una funzione da mondi possibili a estensioni del tipo appropriato[7].

In un contesto modale risultano così sostituibili *salva veritate* tutte le espressioni dotate della stessa intensione. Infatti se due espressioni linguistiche e ed e' hanno la stessa intensione, allora il riferimento di e è lo stesso del riferimento di e' in tutti i mondi possibili. Di conseguenza, se la formula α' è ottenuta da una formula α sostituendovi tutte le occorrenze di e con e', allora α' è vera in tutti i mondi in cui è vera α. In particolare, per ogni mondo w, se α' è vera in tutti i mondi w' accessibili da w, anche α' è vera in tali mondi.

La semantica di Kripke ha dato buoni risultati, oltre che per le logiche modali aletiche, anche per la formalizzazione logica di altri contesti indiretti, quali ad esempio i contesti temporali e deontici. Difficoltà sorgono invece nel caso dei *contesti epistemici*. Il tentativo di impiegare la

[6] Si noti che in **K** può succedere che una formula come $L(\alpha \wedge \neg \alpha)$ sia vera in qualche mondo w. Ciò accade quando da w non è accessibile alcun mondo possibile (questo è infatti l'unico caso in cui $\alpha \wedge \neg \alpha$ può essere vera in tutti i mondi accessibili da w). Se tuttavia in w è vera $L(\alpha \wedge \neg \alpha)$, allora in w è vera $L\beta$ per qualunque formula β del linguaggio. Per evitare ciò basta imporre che da ogni mondo w sia accessibile almeno un mondo possibile. Sul piano sintattico, questo equivale ad aggiungere come assioma $\neg L(\alpha \wedge \neg \alpha)$. Tale assioma viene detto usualmente assioma P, e la logica che si ottiene a partire da **K** imponendo che da ciascun mondo possibile sia sempre accessibile almeno un mondo viene detta sistema **KP**.

[7] Questa generalizzazione della nozione di intensione si ha con i lavori di Richard Montague (1974).

semantica kripkeana dei mondi possibili per la formalizzazione dei contesti epistemici si deve a Jakko Hintikka (1962, 1971)[8]. Nel caso delle logiche epistemiche, la semantica a mondi possibili si basa sull'idea intuitiva che, in ogni mondo possibile, ad un soggetto epistemico sia associato (tramite la relazione R di accessibilità) l'insieme di mondi che corrispondono a tutte le situazioni compatibili con le sue credenze (o conoscenze). Ad esempio, un soggetto epistemico può credere che la capitale d'Italia sia Roma e la capitale degli Stati Uniti sia New York; in tal caso in tutti i mondi possibili compatibili con le sue credenze saranno veri gli enunciati "la capitale d'Italia è Roma" e "la capitale degli Stati Uniti è New York". Se lo stesso soggetto non ha alcuna opinione riguardo alla capitale della Svizzera, in alcuni dei mondi compatibili con le sue credenze sarà vero l'enunciato "la capitale della Svizzera è Zurigo", in altri "la capitale della Svizzera è Ginevra", e così via. In simboli, esprimiamo "è creduto che …" con l'operatore proposizionale B. Affinché sia vero che è creduto un enunciato α, cioè sia vero $B\alpha$, occorre che α sia vero in tutti i mondi che il soggetto epistemico considera possibili. In questi termini, la logica **K** può essere interpretata come una logica epistemica: si tratta della più debole logica della credenza che può essere catturata con la semantica di Kripke.

Per quanto riguarda la logica della conoscenza, esprimiamo "è conosciuto che …" con l'operatore proposizionale K. Tornando all'esempio precedente, un soggetto epistemico può *credere* che "la capitale degli Stati Uniti è New York", ma non può *sapere* che "la capitale degli Stati Uniti è New York", in quanto tale enunciato è falso nel mondo reale. Vale a dire, affinché si *sappia* che α, α deve essere vero nel mondo reale. Dunque, in termini di mondi possibili, affinché in un mondo w sia vero che è conosciuto un enunciato α (ossia, sia vero $K\alpha$,), α deve essere vero, oltre che in tutti i mondi compatibili con le credenze dal soggetto epistemico, anche nel mondo reale. Ciò si può ottenere imponendo che ogni mondo w sia accessibile da sé stesso, ossia, imponendo che la relazione di accessibilità tra mondi R sia riflessiva: per ogni w, si deve avere $R(w, w)$. La logica che si ottiene da **K** imponendo il vincolo che la relazione di accessibilità sia riflessiva viene detta **T**. Un'assiomatizzazione corretta e completa di **T** si ottiene aggiungendo all'apparato deduttivo di **K** (formulato nei termini dell'operatore di conoscenza K) l'assioma $K\alpha \rightarrow \alpha$[9]. Nel seguito di questo capitolo ci occuperemo comunque esclusivamente di logiche della credenza.

La semantica dei mondi possibili presenta severi limiti nel trattamento delle logiche epistemiche. Il problema consiste nel fatto che, in generale, nei contesti epistemici non sono sostituibili *salva veritate* espressioni con la stessa intensione (per questa ragione Cresswell (1975) parla di *contesti iperintensionali*). Ad esempio, possiamo assumere che i nomi propri "Linneo" e "Carl von Linné" abbiano la stessa intensione. Tuttavia dalla verità di "Roberto crede che Linneo abbia scritto il *Sistema naturae*" non segue la verità di "Roberto crede che Carl von Linné abbia scritto il *Sistema naturae*" per la semplice ragione che Roberto potrebbe non sapere che Linneo e Carl von Linné sono la stessa persona. O ancora, se assumiamo che le verità aritmetiche siano necessarie, allora tutti gli enunciati aritmetici veri hanno la stessa intensione. Ma, se α e β sono due enunciati aritmetici veri, da "Rina sa che α" non segue in generale "Rina sa che β" (α potrebbe essere "2 + 2 = 4", mentre β potrebbe essere un complicato teorema di teoria dei numeri). In particolare, tutte le verità logiche hanno la stessa intensione, in quanto sono vere in tutti i mondi possibili. Pertanto se un soggetto epistemico crede, ad esempio, una qualunque tautologia proposizionale, ne segue che egli deve credere ogni tautologia. In altri termini in una logica epistemica basata sulla semantica di Kripke vale la regola di necessitazione formulata per gli operatori epistemici. Analogamente, per le ragioni viste più sopra, l'insieme delle credenze di qualunque soggetto epistemico risulta chiuso rispetto alla relazione di conseguenza logica: un soggetto epistemico è tenuto a credere tutte le conseguenze logiche delle sue credenze. In una semantica kripkeana per la logica epistemica vale infatti la versione epistemica dell'assioma

[8] La formulazione in termini di mondi possibili si trova in (Hintikka 1971); in (Hintikka 1962) la semantica per la logica epistemica è formulata in maniera sostanzialmente equivalente per mezzo di strutture semantiche dette *model set*.

[9] Si noti che in **T** diventa superfluo introdurre l'assioma P.

distributivo (AD). In altri termini, nella semantica di Kripke per la logica epistemica i soggetti di credenza sono *logicamente onniscienti*. Tale assunzione di onniscienza logica è un'idealizzazione decisamente poco realistica delle capacità inferenziali dei soggetti epistemici reali.

Sono state sviluppate diverse proposte per superare queste difficoltà. Partendo dalla constatazione che le intensioni forniscono un'analisi troppo grossolana per rendere conto delle prestazioni inferenziali dei soggetti epistemici, in ambito filosofico la soluzione è stata spesso cercata nell'individuazione di un livello di analisi semantica di grana più fine, allo scopo di definire una classe di entità semantiche che garantissero la sostituibilità *salva veritate* nell'ambito dei contesti epistemici. A partire dalle idee di Carnap sulla distinzione tra intensione e struttura intensionale (Carnap 1947, §§14-15), i tentativi di elaborare un trattamento logico più soddisfacente dei contesti epistemici hanno seguito vie differenti. In anni recenti probabilmente gli sviluppi più estesi e sistematici si sono avuti in ambito computazionale, nel contesto della rappresentazione della conoscenza di impostazione logica in intelligenza artificiale. Nei prossimi paragrafi presenterò le principali di tali proposte[10].

2. Modelli minimali e ragionamento epistemico

La semantica dei cosiddetti *modelli minimali* (o *neighborood models*, o modelli di Scott-Montague)[11] consente di indebolire l'assunzione di onniscienza logica rimanendo nell'ambito della semantica dei mondi possibili. L'idea, in breve, è la seguente. Abbiamo visto che nella semantica a mondi possibili l'intensione di un enunciato α coincide con il sottoinsieme $Int(\alpha)$ di W costituito dai mondi in cui α è vero. In un modello minimale una funzione N associa a ciascun mondo possibile w un insieme $N(w)$ di intensioni (ossia, di sottoinsiemi di W). In ciascun mondo w il soggetto epistemico crede tutti e soli gli enunciati la cui intensione è in $N(w)$. Pertanto, una formula del tipo $B\alpha$ è vera in un mondo w se e soltanto se $Int(\alpha) \in N(w)$. L'insieme delle intensioni associate a un mondo w può essere del tutto arbitrario: nessuna ipotesi viene formulata sulle proprietà della funzione N.

Di conseguenza, la logica definita dalla classe dei modelli minimali non è chiusa rispetto alla conseguenza logica: se in un mondo w è creduto α, e se β è conseguenza logica di α, non è detto che sia creduto β, in quanto può darsi il caso che $Int(\alpha) \in N(w)$ ma $Int(\beta) \notin N(w)$. Dato però che due enunciati α e β logicamente equivalenti hanno stessa intensione, se in un mondo è creduto uno, allora è creduto anche l'altro[12].

Se non si pongono condizioni sulla funzione N si ha una logica in cui le capacità inferenziali dei soggetti epistemici sono praticamente nulle. Indicheremo con **E** questa logica. Per ottenere una assiomatizzazione corretta e completa di **E** basta aggiungere all'apparato deduttivo della logica

---

10 Per una rassegna dei vari modelli sviluppati in ambito filosofico si veda (Bäuerle e Cresswell 1988), una trattazione più recente che tiene conto anche dei modelli di orientamento computazionale descritti nel seguito di questo capitolo è (Meyer 2001); per i modelli descritti nei §§ 2-5 cfr. anche (Frixione 1994).

11 (Montague 1968), (Scott 1970); cfr. (Chellas 1980) per i dettagli tecnici; per un impiego dei modelli minimali nel ragionamento di tipo epistemico vedi anche (Vardi 1986), e, più avanti, il § 5.3.

12 Dato che l'intensione di una qualsiasi tautologia coincide con l'insieme W di tutti i mondi possibili, se $W \notin N(w)$, allora in w il soggetto epistemico non crede alcuna tautologia. Se però in un mondo si crede una tautologia, allora si credono tutte le tautologie. Non vale tuttavia la regola di necessitazione. Possono anche essere credute delle contraddizioni: dato che l'intensione di una contraddizione è l'insieme vuoto, se $\emptyset \in N(w)$, allora in w sono credute tutte le contraddizioni. Inoltre, possono essere creduti due enunciati che si contraddicono tra loro senza che sia creduta una contraddizione: affinché in un mondo w siano vere $B\alpha$ e $B\neg\alpha$ senza che al tempo stesso sia vero $B(\alpha \wedge \neg\alpha)$ basta che $Int(\alpha) \in N(w)$ e $Int(\neg\alpha) \in N(w)$ ma che al tempo stesso $\emptyset \notin N(w)$ (si noti che $Int(\neg\alpha)$ è il complemento di $Int(\alpha)$ rispetto a W). Analogamente non vale la chiusura delle credenze rispetto al condizionale, in quanto non è valida la formula $B\alpha \wedge B(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow B\beta$. Può capitare infatti che $Int(\alpha) \in N(w)$, $Int(\alpha \rightarrow \beta) \in N(w)$, ma che allo stesso tempo $Int(\beta) \notin N(w)$. Per ragioni analoghe, non sono valide $B(\alpha \wedge \beta) \rightarrow B\alpha \wedge B\beta$ e $B\alpha \wedge B\beta \rightarrow B(\alpha \wedge \beta)$. Infine, è possibile che in un mondo w non sia creduto alcun enunciato; basta che $N(w) = \emptyset$ (ovviamente, $N(w) = \emptyset$ è ben diverso da $\emptyset \in N(w)$).

proposizionale classica una regola in base a cui, se $\alpha \leftrightarrow \beta$ è un teorema della logica, allora se ne può derivare $B\alpha \leftrightarrow B\beta$. In altri termini, nella logica **E** l'unico vincolo sulle credenze di un soggetto epistemico consiste nel fatto che, se il soggetto crede un enunciato, allora è tenuto a credere tutti gli enunciati ad esso logicamente equivalenti.

Logiche diverse, che vincolano maggiormente il comportamento dell'operatore di credenza B, possono essere ottenute restringendo il comportamento della funzione N. Chiamiamo ad esempio **EM** la logica che si ottiene a partire da **E** imponendo che valga la *proprietà di chiusura rispetto ai soprainsiemi*, ossia che, per ogni mondo w e per tutti gli insiemi di mondi X e Y, se $X \subset Y$ e se $X \in N(w)$, allora $Y \in N(w)$. (Oppure, in maniera equivalente, che, se $X \cap Y \in N(w)$, allora $X \in N(w)$ e $Y \in N(w)$). Si vede facilmente che in **EM** risulta valido:

$$\text{(AM)} \quad B(\alpha \wedge \beta) \rightarrow B\alpha \wedge B\beta$$

Un'assiomatizzazione corretta e completa di **EM** si può ottenere aggiungendo (AM) agli assiomi di **E**.

Analogamente, la *proprietà di chiusura rispetto all'intersezione*, in base alla quale per ogni mondo w e per ogni X, $Y \subset W$, se $X \in N(w)$ e $Y \in N(w)$, allora $X \cap Y \in N(w)$, equivale all'assioma:

$$\text{(AC)} \quad B\alpha \wedge B\beta \rightarrow B(\alpha \wedge \beta)$$

Chiameremo **EC** la logica dei modelli minimali in cui vale la chiusura rispetto all'intersezione.

La *proprietà di esistenza dell'unità*, in base a cui, per ogni mondo possibile w, $W \in N(w)$, equivale alla validità dell'assioma:

$$\text{(AN)} \quad B\,(\alpha \vee \neg\, \alpha)$$

Chiameremo **EN** la logica dei modelli minimali in cui vale la proprietà di esistenza dell'unità.

Chiameremo infine **EMCN** la logica dei modelli minimali chiusi rispetto ai soprainsiemi, rispetto all'intersezione e dotati di unità. Una assiomatizzazione corretta e completa per **EMNC** si ottiene aggiungendo all'apparato deduttivo di **E** gli schemi di assiomi (AM), (AC) e (AN). Si può dimostrare che **EMCN** è equivalente alla logica **K** del paragrafo precedente. Quindi la semantica dei modelli di credenza costituisce una generalizzazione di quella dei modelli di Kripke.

Alcune logiche dei modelli minimali hanno proprietà interessanti dal punto di vista epistemico (si veda ad esempio il sistema descritto nel §5.3). Tuttavia, il fatto che enunciati logicamente equivalenti non siano distinguibili dal punto di vista del ragionamento epistemico è ancora una idealizzazione troppo forte per poter concludere che, con i modelli di credenza, si sia fatto un significativo passo avanti nella soluzione del problema dell'onniscienza logica. Ciò dipende dal fatto che, in base alla semantica dei modelli minimali, nei contesti epistemici non si può distinguere tra enunciati con la stessa intensione.

3. Modelli sintattici delle credenze: il sistema di Konolige

Per superare le difficoltà che la semantica a mondi possibili presenta nei confronti del trattamento logico degli operatori epistemici, un filone di ricerche si è orientato a identificare gli oggetti di credenza con entità di tipo sintattico[13]. In questi modelli le credenze di un soggetto

[13] Si noti che talvolta si usa l'espressione *syntactic approach* per indicare i modelli del ragionamento epistemico di tipo *citazionale* (*quotational*), nei quali cioè la credenza viene espressa per mezzo di predicati che assumono come argomenti *nomi* di oggetti di credenza, anziché (come qui) tramite operatori proposizionali del tipo di B, che si

epistemico sono fatte coincidere con un insieme di enunciati, o del linguaggio naturale, oppure di qualche forma di codice mentale interno, di "linguaggio del pensiero". In particolare, varie proposte sviluppate nell'ambito delle scienze cognitive e dell'intelligenza artificiale[14] adottano la seconda alternativa. Senza entrare in particolari tecnici, in questo paragrafo descriverò schematicamente gli elementi essenziali del modello proposto da Kurt Konolige (1986) mantenendo una terminologia il più possibile conforme a quella del resto del capitolo.

La logica di Konolige modella situazioni in cui sono presenti più soggetti epistemici diversi. Ad ogni soggetto epistemico x viene associata una *struttura di deduzione* $d(x)$ costituita da un insieme $b(x)$ di enunciati di un certo linguaggio logico (che può variare da soggetto a soggetto) e da un apparato deduttivo $r(x)$ costituito da assiomi e regole di inferenza. L'insieme delle credenze $C(d(x))$ del soggetto epistemico x è l'insieme degli enunciati derivabili dall'insieme $b(x)$ mediante l'apparato deduttivo $r(x)$. Sull'apparato deduttivo, che anch'esso può variare da soggetto a soggetto, non viene fatta alcuna ipotesi di completezza rispetto alla semantica della parte non epistemica del linguaggio; anzi, le regole di derivazione possono essere formulate in modo da tenere conto di eventuali incompetenze del soggetto o di un impiego limitato di risorse. Konolige richiede comunque che le regole siano corrette, siano effettive e stabili (nel senso che il numero delle loro premesse non può variare). Per rendere conto dell'iterazione degli operatori epistemici vengono introdotti i *punti di vista*, ossia sequenze finite di soggetti epistemici. Ad esempio, se x e y sono due soggetti epistemici, (x, y) è il punto di vista di x sulle credenze di y e $d(x, y)$ è la struttura di deduzione ad esso associata, che è costituita dall'insieme di enunciati $b(x, y)$ e dall'apparato deduttivo $r(x, y)$. L'insieme $C(d(x, y))$ rappresenta le credenze che x attribuisce a y (e che, in generale, saranno diverse da $C(d(y))$). Questo procedimento può essere iterato per tenere conto di sequenze di operatori epistemici incapsulati di lunghezza arbitraria. Così, ad esempio, $d(x, y, z)$ è la struttura di deduzione che rappresenta ciò che x crede che y creda a proposito delle credenze di z. E $d(x, x)$ rappresenta le credenze di x a proposito delle sue stesse credenze.

Quindi, nel sistema di Konolige, a ciascun punto di vista v (cioè, a ciascuna sequenza finita di soggetti epistemici) è associata una struttura di deduzione $d(v)$, costituita dalla coppia $(b(v), r(v))$. Supponendo, per semplicità, che il linguaggio di tutte le strutture di deduzione sia lo stesso, il linguaggio del sistema sarà costituito, oltre che dagli usuali connettivi proposizionali[15], da n operatori proposizionali di credenza B_i, uno per ciascun soggetto epistemico i.

Sul piano sintattico, una assiomatizzazione del modello di Konolige si ottiene aggiungendo all'apparato deduttivo della logica proposizionale classica un apparato deduttivo $d(v)$ per ciascun punto di vista e una regola, detta di *collegamento procedurale*, in base alla quale:

se da $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ si può dedurre β sulla base delle regole di $d(i)$,
allora da $B_i\, \alpha_1, B_i\, \alpha_2, ..., B_i\, \alpha_k$ si può dedurre $B_i\, \beta$.

Per trattare gli operatori di credenza iterati, gli apparati deduttivi per i vari punti di vista $d(v)$ dovranno a loro volta contenere delle regole di collegamento del tipo:

se da $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ si può dedurre β sulla base delle regole di $d(v, i)$[16],
allora in $d(v)$ da $B_i\, \alpha_1, B_i\, \alpha_2, ..., B_i\, \alpha_k$ si può dedurre $B_i\, \beta$.

---

applicano a formule (cfr. ad es. Thomason 1980; des Rivieres e Levesque 1986). I linguaggi di tipo citazionale hanno un potere espressivo maggiore di quelli basati su operatori proposizionali, e a certe condizioni possono dar luogo ad inconsistenze. Il senso in cui si parla di modelli sintattici in questo paragrafo è diverso; i problemi legati ai modelli citazionali non vengono trattati, e sono in larga parte indipendenti dai temi di questo capitolo.

[14] Cfr. ad es. (Moore e Hendrix 1982).

[15] Si tenga presente che all'interno delle strutture di deduzione non è detto che in generale valga l'interdefinibilità dei connettivi, per cui tutti i connettivi verofunzionali che si intendono impiegare devono essere inseriti nel linguaggio.

[16] Si noti che, se v è un punto di vista, allora, per ogni soggetto i, anche v, i è un punto di vista.

La semantica del sistema riflette banalmente tale assiomatizzazione. La semantica della parte non modale del linguaggio è una usuale semantica classica per la logica proposizionale. Per quanto riguarda le formule modali, una formula del tipo $B_i\alpha$ è vera se e soltanto se α appartiene all'insieme $C(d(i))$ delle credenze del soggetto i-esimo, ossia se α è deducibile a partire dagli enunciati di $b(i)$ mediante le regole di $r(i)$ (queste ultime comprenderanno, in generale, anche le regole di collegamento disponibili ai vari soggetti i, e ciò garantisce il trattamento degli operatori epistemici iterati mediante il richiamo ai vari punti di vista).

Per gli approfondimenti tecnici rinvio a (Konolige 1986). Si noti soltanto che si può dimostrare che, se gli apparati deduttivi associati a tutti i punti di vista sono completi dal punto di vista proposizionale, e sono inoltre dotati di regole di collegamento per ogni punto di vista, allora la logica delle strutture di deduzione è equivalente al sistema $\mathbf{K_n}$, vale a dire, al sistema **K** esteso a n soggetti epistemici.

Nei modelli sintattici di questo tipo il problema dell'onniscienza logica viene "risolto" adottando sistemi deboli di regole di inferenza. Il prezzo è però molto alto. Per un verso, la semantica a mondi possibili è di grana troppo grossolana per modellare gli atteggiamenti proposizionali in quanto enunciati logicamente equivalenti risultano indistinguibili a prescindere dalla loro complessità sintattica. Per l'altro verso, i modelli sintattici hanno una grana troppo fine in quanto praticamente tutti gli enunciati risultano semanticamente distinti. Ad esempio, si può credere $p \vee q$ senza al contempo credere $q \vee p$ (in quanto "$p \vee q$" e "$q \vee p$" sono enunciati sintatticamente distinti). Si può ovviare a questo inconveniente imponendo che ogni apparato deduttivo $r(v)$ contenga una regola per cui da $p \vee q$ si può derivare $q \vee p$. Tuttavia si tratta evidentemente di una soluzione *ad hoc*, del tutto immotivata dal punto di vista semantico. Si potrebbe infatti continuare con regole del tipo: da $\neg\neg p$ si può derivare p; da p e q si può derivare $p \wedge q$; in ogni $b(v)$ devono figurare tautologie ovvie come $p \rightarrow p$. Ma quali tautologie sono ovvie? E, in generale, quando bisogna fermarsi nell'estendere l'espressività dei vari $r(v)$? Il modello non offre alcuna indicazione sulle scelte da effettuare per non smarrire, da un lato, ogni sistematicità nelle prestazioni inferenziali degli agenti epistemici, e per non ricadere, dall'altro, in uno dei sistemi dei paragrafi precedenti, Il problema principale risiede nel fatto che la "semantica" di Konolige è tale solo in un senso molto debole: il significato del sottoinsieme più problematico del linguaggio (ossia, le formule che compaiono nell'ambito degli operatori di credenza) viene definito semplicemente interpretando le strutture del linguaggio su loro stesse.

4. La logica della credenza esplicita e implicita di Levesque

Un diverso modo di affrontare la questione è stato proposto da Hector Levesque[17], e si basa su una generalizzazione della semantica a mondi possibili che cerca di evitarne le conseguenze indesiderate. Il problema con la semantica di Kripke sorge in quanto i mondi possibili sono coerenti (a ciascun enunciato associano al più un valore di verità) e completi (a ciascun enunciato associano almeno un valore di verità). La proposta di Levesque consiste essenzialmente nel sostituire i mondi possibili con altre entità semantiche, dette *situazioni*[18], che possono essere incoerenti (alcuni enunciati possono ricevere entrambi i valori di verità) o incomplete (alcuni enunciati possono non ricevere alcun valore di verità). Questo consente di elaborare modelli di ragionamento epistemico in cui le credenze non siano chiuse rispetto alla conseguenza logica.

[17] Si veda (Levesque 1984) e il cap. 12 di (Levesque e Lakemeyer 2001).

[18] Il termine *situazione* è stato ispirato a Levesque dalla terminologia della *situation semantics* (Barwise e Perry 1983). Anche le situazioni di Barwise e Perry, a differenza dei mondi della semantica modellistica, sono incomplete. Barwise (1981) le introduce per render conto degli enunciati percettivi, che presentano problemi analoghi agli enunciati epistemici.

Intuitivamente, l'uso di situazioni *incomplete* dovrebbe modellare la parte di realtà rilevante per le credenze di un soggetto epistemico, lasciando indeterminato tutto il resto. "Si consideri – dice Levesque – la situazione in cui io siedo al mio terminale al lavoro. Potremmo dire che questa situazione giustifica il fatto che io sono al lavoro, che qualcuno è al mio terminale, che c'è un libro oppure un terminale sulla mia scrivania, e così via. D'altro canto, essa non motiva l'opinione che mia moglie è a casa, che non è fuori a fare acquisti, e neppure l'opinione che essa è oppure non è a casa. Benché quest'ultimo fatto sia certamente vero, che io sieda al mio terminale non ha nulla a che fare con tutto ciò" (Levesque, 1984, p. 199). L'uso di situazioni *incoerenti* viene motivato sulla base del fatto che un soggetto epistemico può avere concezioni o informazioni sbagliate che lo portano a credere possibili stati di cose che di fatto non lo sono.

Più in dettaglio, Levesque prende in considerazione due tipi di credenza, la *credenza implicita*, che ha a che fare con tutto ciò che è implicito nelle credenze di un soggetto ("come sarebbe il mondo se ciò che il soggetto crede fosse vero") e che quindi è chiusa rispetto alla conseguenza logica, e la *credenza esplicita*, ossia tutto ciò che di fatto il soggetto ritiene vero. Nel linguaggio vengono quindi introdotti due operatori epistemici, uno per la credenza implicita e uno per la credenza esplicita, che indicheremo rispettivamente con B e E. Nella sua versione originaria, la logica di Levesque non prevede iterazioni degli operatori epistemici[19].

Indichiamo con S l'insieme delle situazioni. Nella semantica per la logica della credenza implicita ed esplicita di Levesque, in ciascuna situazione s di S, a ogni lettera enunciativa p è associato un sottoinsieme di $\{\mathbf{v}, \mathbf{f}\}$. Cioè, a differenza di quanto accade nei modelli di Kripke (in cui si danno due soli casi: dato un mondo w, a p viene associato il valore $\mathbf{v}$ oppure il valore $\mathbf{f}$), ora i casi sono quattro: oltre ai due precedenti può accadere che a p in s sia associato l'insieme vuoto $\varnothing$ (ossia p non è né vera né falsa nella situazione s) e che a p in s sia associato l'insieme $\{\mathbf{v}, \mathbf{f}\}$ (ossia p è sia vera che falsa nella situazione s).

Si dice poi che una situazione s è un *mondo* se e solo se in s ogni lettera enunciativa riceve uno ed uno solo dei valori di verità (ossia sono mondi le situazioni coerenti e complete). Un ruolo importante è svolto dall'insieme $W(s)$ dei *mondi compatibili con una data situazione* s, definito come l'insieme dei mondi w contenuti in S tali che, se p è vera in s, allora p è vera in w, e se p è falsa in s, allora p è falsa in w. In altri termini, i mondi compatibili con s sono quelli che concordano con s sulle lettere alle quali in s è attribuito un solo valore di verità (ossia i mondi di S che completano la situazione s). Si ha immediatamente che se una situazione s è incoerente (ossia, per qualche p, a p è associato l'insieme $\{\mathbf{v}, \mathbf{f}\}$), allora $W(s) = \varnothing$ (nessun mondo è compatibile con s). Se S' è un insieme di situazioni (ossia, $S' \subseteq S$), allora si pone $W(S')$ uguale all'unione dei $W(s)$ tali che $s \in S'$. Quindi, ad esempio, $W(S)$ è l'insieme dei mondi contenuti in S.

Nella semantica della logica di Levesque al soggetto di credenza è associato un insieme C di situazioni: C è il sottoinsieme di S che comprende le situazioni che sono compatibili con le credenze del soggetto epistemico (o, in altri termini, l'insieme delle situazioni che sono ritenute possibili dal soggetto epistemico)[20]. Di conseguenza, in base alle definizioni precedenti, $W(C)$ è l'insieme dei mondi compatibili con le situazioni ritenute possibili dal soggetto epistemico.

Data una situazione s, non accade (come accadrebbe invece rispetto a un mondo w) che una formula α è vera in s se e soltanto se α non è falsa in s: può capitare che α sia al contempo vera e falsa in s, o che non sia né vera né falsa. Per caratterizzare il valore di verità di una formula in una situazione bisogna quindi trattare separatamente il caso in cui la situazione rende vera la formula e quello in cui la rende falsa. Si avrà quindi, ad esempio, che:

- α è vera in una situazione s se e solo se $\neg\,\alpha$ è falsa in s

[19] Come vedremo più oltre, sono state in seguito sviluppate versioni di questa logica che ammettono l'iterazione degli operatori di credenza.

[20] Rispetto alla semantica di Kripke, di cui questa costituisce un'evidente generalizzazione, l'insieme C svolge un ruolo analogo a quello della relazione R di accessibilità. Non è necessario impiegare una *relazione* di accessibilità perché non sono ammesse iterazioni degli operatori epistemici.

- α è falsa in s se e solo se $\neg\, \alpha$ è vera in s

- $\alpha \wedge \beta$ è vera in s se e solo se α e β sono entrambe vere in s
- $\alpha \wedge \beta$ è falsa in s se e solo se almeno una tra α e β è falsa in s

- $\alpha \rightarrow \beta$ è vera in s se e solo α è falsa oppure β è vera in s
- $\alpha \rightarrow \beta$ è falsa in s se e solo α è vera e β è falsa in s

e così via. Nella logica classica (come nel caso in cui tutte le situazioni s sono mondi corretti e completi) la seconda clausola di ognuna di queste coppie diventa ridondante. Non è così invece, per le ragioni esposte sopra, nel caso generale della logica di Levesque.

La parte non modale del linguaggio viene valutata in modo classico; vale a dire, si assume che il mondo reale sia appunto un *mondo*, sia cioè corretto e completo. Le situazioni svolgono un ruolo solo nella valutazione delle formule che compaiono nell'ambito degli operatori di credenza. Esse sono usate soltanto per modellare gli stati cognitivi dell'agente epistemico. In particolare, si avrà che una formula di tipo $E\alpha$ (dove E è l'operatore di credenza esplicita) è vera se e solo se α è vera in tutte le situazioni s che appartengono a C[21]. Per quanto riguarda l'operatore di credenza implicita, una formula del tipo $B\alpha$ è vera se e soltanto se α è vera in tutte le situazioni s tali che $s \in W(C)$, cioè in tutti i mondi compatibili con le situazioni ritenute possibili dal soggetto epistemico. Poiché le formule costruite per mezzo dell'operatore B vengono valutate esclusivamente rispetto a mondi possibili (quindi corretti e completi), B si comporta come un operatore modale classico. Si dimostra facilmente infatti che la logica così definita, rispetto all'operatore B coincide con il sottoinsieme di **K** che non comprende modalità iterate.

Più interessante è il comportamento dell'operatore di credenza esplicita E. Si può verificare ad esempio che può essere soddisfatto un insieme di formule del tipo: $\{E\alpha, E(\alpha \rightarrow \beta), \neg E\beta\}$. Supponiamo infatti che ogni situazione s di C renda vere α e $\alpha \rightarrow \beta$. Supponiamo tuttavia che vi sia in C almeno una situazione s' che rende α sia vera che falsa, e che rende falsa β. Anche s' rende vere α e $\alpha \rightarrow \beta$ (quest'ultima perché α è falsa). Di conseguenza, in base alle definizioni precedenti, risultano vere $E\alpha$ e $E(\alpha \rightarrow \beta)$ e falsa $E\beta$ (e quindi vera $\neg E\beta$). Il soggetto cognitivo può quindi credere esplicitamente α e $\alpha \rightarrow \beta$ senza al tempo stesso credere esplicitamente β. In altri termini, l'insieme delle credenze esplicite del soggetto epistemico non è chiuso rispetto al *modus ponens*.

In modo analogo si può constatare che non tutti gli enunciati (classicamente) validi devono essere creduti esplicitamente. Ad esempio è soddisfacibile l'enunciato $\neg\, E(\alpha \vee \neg\alpha)$: basta che vi sia una situazione s in C che non assegna a α alcun valore di verità. Così, se α è vero per ogni s in C, ma vi è una s' in C per cui β non ha alcun valore di verità in s', allora è vero $E\alpha$, ma non è vero $E(\alpha \wedge (\beta \vee \neg\beta))$. Può quindi accadere che non vengano creduti esplicitamente tutti gli enunciati logicamente equivalenti a un enunciato creduto esplicitamente. Analogamente, si può credere esplicitamente una contraddizione senza che sia creduto esplicitamente qualsiasi enunciato.

Per quanto concerne le relazioni fra conoscenza esplicita e implicita, tutto ciò che è creduto esplicitamente è anche creduto implicitamente: è valida cioè la formula $E\alpha \rightarrow B\alpha$[22].

---

[21] Ed $E\alpha$ è falsa se e soltanto se $E\alpha$ non è vera – si ricordi infatti che non sono ammesse modalità iterate, quindi nessuna formula modale può comparire nell'ambito di un altro operatore modale, e non è pertanto necessario valutare le formule modali rispetto a situazioni che non siano mondi.

[22] Questo è evidente se si considera che, per ogni situazione s, se s è coerente, allora tutti i mondi in $W(s)$ conservano i valori di verità determinati da s; se invece s è incoerente, allora $W(s) = \emptyset$. Quindi, tutti gli enunciati che sono veri in tutte le situazioni di C sono veri anche in tutti i mondi di $W(C)$). Inoltre, se un soggetto epistemico crede esplicitamente una contraddizione, allora crede implicitamente ogni enunciato: è valido cioè $E(\alpha \wedge \neg\, \alpha) \rightarrow B\beta$: se è vero $E(\alpha \wedge \neg\, \alpha)$, allora ogni s in C è incoerente, e quindi $W(C) = \emptyset$, per cui ogni enunciato è banalmente vero in tutti gli elementi di $W(C)$.

La logica di Levesque non prevede l'iterazione degli operatori epistemici. Uno sviluppo in questo senso è stato proposto da Gerhard Lakemeyer[23]. Nella logica sviluppata da Lakemeyer vi sono due operatori epistemici, uno per la credenza esplicita (E) e uno per la credenza implicita (B), che possono essere iterati. Tuttavia si suppone che le credenze implicite di un soggetto non abbiano a che fare con i suoi stati cognitivi, per cui non si ammette che si possano avere credenze esplicite relativamente alle credenze implicite. Ossia, in termini sintattici, non vi possono essere occorrenze dell'operatore B nell'ambito dell'operatore E.

Nella semantica di Levesque il credere un enunciato è scorrelato dal credere la sua negazione, come se il soggetto epistemico usasse fonti di evidenza diverse per confermare o smentire gli oggetti della sua credenza (esplicita). Pertanto, per estendere il modello al trattamento di operatori epistemici iterati, Lakemeyer introduce due relazioni distinte R' e R'' di accessibilità fra situazioni. In una certa situazione s è vero che è creduto esplicitamente un enunciato α (cioè, è vero $E\alpha$) se e solo se α è vero in tutte le situazioni accessibili da s rispetto alla relazione R', mentre è falso che è creduto esplicitamente un enunciato α (e dunque è vero $\neg E\alpha$) se è solo se è falso in qualche situazione accessibile da s rispetto alla relazione R''.

Come nella logica di Levesque, una situazione è un mondo w se e solo se è corretta e completa, vale a dire se ad ogni lettera proposizionale p viene assegnato in w uno ed un solo valore di verità. Inoltre deve valere che, rispetto a ciascun mondo w, R' e R'' devono coincidere (ossia, si deve avere che, per ogni s, $R'(w,s)$ se e solo se $R''(w,s)$). Per quanto riguarda la credenza implicita, in una data situazione s è creduto che α (cioè, è vero $B\alpha$) se e solo se α è vero in tutti i *mondi* accessibili da s (ed è falso che è creduto implicitamente α se e solo se non è vero che è creduto implicitamente α).

Anche in questa logica le credenze esplicite non sono chiuse rispetto all'implicazione, gli enunciati validi non devono essere creduti esplicitamente, un enunciato logicamente equivalente a uno creduto esplicitamente può non essere creduto esplicitamente e si possono credere esplicitamente delle contraddizioni senza che sia creduto esplicitamente ogni enunciato. L'operatore B di credenza implicita si comporta anche qui come un operatore modale classico[24].

La logica che vale all'interno dei contesti di credenza esplicita nel sistema di Levesque (e nei sistemi che ne derivano) ha forti legami con una logica della rilevanza, e precisamente con la logica del *tautological entailment* di Anderson e Belnap[25], alla quale Levesque si è ispirato. Di conseguenza, i soggetti epistemici nella logica di Levesque non sono logicamente onniscienti *rispetto alla logica classica*, ma lo sono rispetto a un tipo di logica non classica (rispetto appunto alla logica del *tautological entailment*).

La logica del *tautological entailment* (e quindi, di conseguenza, la logica che vale all'interno dei contesti di credenza esplicita) ha però un'interessante caratteristica. E' ben noto che nella logica proposizionale classica il problema di decidere se una certa formula segue logicamente da un insieme dato di formule non è trattabile computazionalmente (equivale infatti al problema di decidere se una formula proposizionale α è una tautologia, il che verosimilmente richiede, nel peggiore dei casi, un numero di passi di calcolo che cresce esponenzialmente rispetto al numero di lettere enunciative diverse che compaiono in α). Nella logica del *tautological entailment* il problema di decidere la relazione di conseguenza logica ha caratteristiche computazionali

---

[23] Lakemayer (1987). Lakemeyer (1994) estende questo tipo di logica anche al caso predicativo. Si veda anche il cap. 12 di (Levesque e Lakemeyer 2001).

[24] Per la precisione, Lakemeyer (1987) richiede che, per tutti i mondi w e w' e per tutte le situazioni s, valga quanto segue: (a) se $R'(w,w')$ e $R'(w',s)$, allora $R'(w,s)$ e (b) se $R'(w,w')$ e $R'(w,s)$, allora $R'(w',s)$. La condizione (a) corrisponde alla transitività e la condizione (b) all'euclidicità della relazione di accessibilità tra mondi nei modelli di Kripke: dato che R' e R'' coincidono rispetto ai mondi, ciò comporta che l'operatore B di credenza implicita si comporti come nel sistema modale **C5**.

[25] (Anderson e Belnap 1962), (Belnap 1975, 1977).

migliori[26]. Dunque, sebbene la logica della credenza esplicita di Levesque costituisca comunque una idealizzazione delle capacità inferenziali dei soggetti epistemici reali (come si è detto, i soggetti epistemici sono logicamente onniscienti rispetto alla logica del *tautological entailment*), dal punto di vista computazionale ciò costituisce una idealizzazione più realistica rispetto alle logiche epistemiche tradizionali[27].

Uno sviluppo interessante di questo tipo di logiche che va in questa direzione è stato proposto da Marco Cadoli e Marco Schaerf (Schaerf e Cadoli 1995) che, a partire da una semantica del tipo di quella utilizzata da Levesque, hanno sviluppato un modello di inferenza approssimata per basi di conoscenza formulate nel linguaggio della logica proposizionale. Il modello si basa su due successioni di relazioni di conseguenza logica, le prime sempre corrette, le seconde sempre complete, che convergono verso la relazione di conseguenza logica proposizionale classica. Man mano che si procede lungo le due successioni, aumentano rispettivamente completezza e correttezza, e si ottengono quindi approssimazioni sempre migliori della relazione di conseguenza logica classica. Quanto migliore è l'approssimazione ottenuta, tanto maggiore è lo "sforzo computazionale" richiesto. Basandosi su questo stesso modello, Cadoli e Schaerf (1992) hanno elaborato una logica epistemica per ragionatori non onniscienti nella quale alle due successioni di relazioni di conseguenza logica sopra menzionate corrispondono due famiglie di operatori epistemici. Tali operatori costituiscono approssimazioni via via più precise dell'operatore di credenza classico, e corrispondono a vincoli computazionali più o meno restrittivi sulle capacità inferenziali del soggetto di credenza.

Concludendo, si può osservare che il problema dell'onniscienza logica comprende almeno tre diverse questioni:

1) *chiusura rispetto all'implicazione*: se sono creduti α e $\alpha \to \beta$, allora è creduto β;
2) *chiusura rispetto alla conseguenza logica*: se è creduto α, e $\alpha \to \beta$ è valido, allora è creduto β;
3) *chiusura rispetto alle tautologie*: sono credute tutte le tautologie.

Nelle logiche esaminate in questo paragrafo la credenza esplicita non ha nessuna di queste proprietà. Tuttavia, ad un esame più attento, le ragioni a sostegno di ciò non sembrano coincidere esattamente con le nostre intuizioni concernenti il problema dell'onniscienza logica. Ad esempio, come si è visto nel caso della soddisfacibilità dell'insieme di formule $\{E\alpha, E(\alpha \to \beta), \neg E\beta\}$, la mancanza di chiusura rispetto all'implicazione è strettamente connessa con la possibilità di situazioni incoerenti. Ciò è evidente dal fatto che è valida la formula:

$$E\alpha \wedge E(\alpha \to \beta) \to E(\beta \vee (\alpha \wedge \neg\, \alpha))$$

dalla quale risulta che, se un soggetto crede α e $\alpha \to \beta$ senza credere al contempo β è perché ammette che la sua credenza di α sia in qualche modo inaffidabile. Dal punto di vista intuitivo non sembra questa l'unica ragione per cui le credenze dei soggetti epistemici reali non sono chiuse rispetto all'implicazione. Il fatto che gli enunciati validi non siano creduti esplicitamente deriva dall'incompletezza delle situazioni, ossia dalla mancanza di quella che Fagin e Halpern chiamano la *consapevolezza* (§5.1). La mancata chiusura rispetto alla conseguenza logica dipende da entrambe le circostanze: se un soggetto epistemico crede α, e se $\alpha \to \beta$ è una formula valida, affinché egli non creda β occorre che non sia consapevole di $\alpha \to \beta$, oppure che ritenga possibile una situazione in cui α è sia vero che falso.

---

[26] Più precisamente, nella logica proposizionale classica stabilire se una formula α segue da un insieme di formule Γ è un problema co-NP completo; nella logica della credenza esplicita di Levesque stabilire se una credenza α segue da un insieme di credenze Γ richiede un tempo di calcolo che cresce linearmente rispetto alla lunghezza di α e di Γ (misurata nei termini del numero di lettere proposizionali distinte che vi compaiono) *a condizione però che* α *e* Γ *siano in forma normale congiuntiva*. (Se α e Γ sono formule proposizionali qualunque, allora il problema è co-NP completo anche nella logica della credenza esplicita). Si veda Levesque (1984).

[27] Su complessità computazionale e idealizzazione delle capacità dei soggetti cognitivi si veda ad esempio (Frixione 2001). Su ragionamento e complessità computazionale in intelligenza artificiale si veda (Levesque 1988).

5. Fagin e Halpern: tre logiche per il ragionamento epistemico limitato

Ronald Fagin e Joseph Halpern, in un articolo apparso su *Artificial Intelligence*[28], sottolineano come la mancanza di onniscienza logica nei soggetti epistemici reali sia un fenomeno complesso, dovuto al concorso di cause diverse. Le proposte fin qui esaminate risulterebbero inadeguate poiché si focalizzano solo alcune di queste cause. In questa prospettiva, Fagin e Halpern hanno proposto tre sistemi logici differenti per affrontare aspetti diversi del problema. Vediamo in sintesi ciascuno di essi.

5.1 Una logica della consapevolezza

Il primo sistema, la *logica della consapevolezza*, è una variante della logica della credenza implicita ed esplicita di Levesque che consente l'iterazione di operatori epistemici e che prende in considerazione più soggetti di credenza diversi. In essa si evita di ammettere situazioni incoerenti o incomplete, introducendo esplicitamente nella semantica una *funzione di consapevolezza* (*awareness*) per ciascun soggetto epistemico. Tale funzione ha lo scopo di rendere esplicito nella semantica il fatto che un soggetto epistemico può non essere consapevole del significato di alcune delle lettere proposizionali del linguaggio (questo potrebbe accadere ad esempio perché tali lettere formalizzano enunciati in cui compaiono concetti che il soggetto non conosce). In sintesi, si parte da una semantica di Kripke con n relazioni di accessibilità R_i (una per ciascun soggetto epistemico i), e la si estende con n funzioni di consapevolezza A_i che associano a ciascun mondo w un insieme $A_i(w)$ di lettere enunciative. L'insieme $A_i(w)$ è l'insieme delle lettere enunciative di cui l'i-esimo soggetto epistemico è consapevole nel mondo w. Le funzioni A_i hanno lo scopo di "ritagliare" delle situazioni parziali all'interno dei mondi possibili; intuitivamente, tali situazioni parziali corrispondono al punto di vista dei diversi soggetti. Senza entrare nei dettagli tecnici, le funzioni di consapevolezza entrano in gioco quando si tratta di valutare gli enunciati retti dagli operatori E_i di credenza esplicita (esiste un operatore E_i per ciascun soggetto epistemico i): affinché in un mondo w sia vero $E_i\alpha$ bisogna che in tutti i mondi w' accessibili da w (quelli per cui $R_i(w, w')$) sia vera α e che il soggetto sia consapevole di tutte le lettere enunciative che compaiono in α (ossia, che tali lettere devono far parte di $A_i(w)$). Le situazioni "ritagliate" dalle funzioni A_i sono incomplete. Quindi, come nella logica di Levesque, non è detto che se in una situazione non è vera una data formula, allora sia vera la sua negazione, e viceversa[29].

La credenza implicita è espressa per mezzo di n operatori epistemici B_i (uno per ciascun soggetto epistemico i). Nella valutazione delle formule di tipo $B_i\alpha$ le funzioni A_i non entrano in gioco. Rispetto alla credenza implicita la semantica per la logica della consapevolezza si comporta dunque come la semantica a mondi possibili classica.

Come nella logica di Levesque, la credenza esplicita implica quella implicita, non tutti gli enunciati validi devono essere creduti esplicitamente e la credenza esplicita non è chiusa rispetto alla conseguenza logica. Tuttavia, il fatto di non utilizzare situazioni incoerenti comporta che la credenza esplicita sia chiusa rispetto all'implicazione e che non si possano credere esplicitamente delle contraddizioni.

---

[28] (Fagin e Halpern 1988); si veda anche il cap. 9 di (Fagin, Halpern, Moses e Vardi 1995).

[29] Questo, dal punto di vista tecnico, comporta che per definire la semantica si debba considerare separatamente il caso in cui una situazione supporta la verità di un formula e quello in cui una situazione supporta la sua falsità, come nel caso delle logiche descritte nel paragrafo precedente.

5.2 Una logica della consapevolezza generalizzata.

Nella *logica della consapevolezza generalizzata*, il secondo dei sistemi proposti da Fagin e Halpern, i valori delle funzioni di consapevolezza possono essere insiemi di enunciati qualunque: non solo di lettere enunciative, ma anche enunciati complessi. L'idea è quella di incorporare in una semantica di tipo modellistico tradizionale una trattazione sintattica della credenza adeguata a varie forme di ragionamento epistemico limitato (in sintonia con le proposte illustrate nel § 3). Anche in questo caso vengono presi in considerazione più soggetti di credenza diversi. Per ciascun soggetto epistemico i, esiste un operatore E_i per la credenza esplicita e un operatore B_i per la credenza implicita. Come nella logica della consapevolezza vista sopra, si parte da una semantica di Kripke con n relazioni di accessibilità R_i e la si estende con n funzioni di consapevolezza A_i che associano a ciascun mondo w un insieme $A_i(w)$ di formule, di cui l'i-esimo soggetto epistemico è consapevole nel mondo w. Affinché in un mondo w sia vero $E_i\alpha$ bisogna che in tutti i mondi w' accessibili da w (quelli per cui $R_i(w, w')$) sia vera α e che il soggetto sia consapevole di α (ossia, α deve far parte di $A_i(w)$). Per quanto riguarda la credenza implicita, una formula del tipo $B_i\alpha$ è vera nel mondo w se e soltanto se α è vera in tutti i mondi w' accessibili da w. Quindi, come nella logica precedente, i B_i si comportano come operatori modali classici.

In generale, la credenza esplicita non è chiusa rispetto alla implicazione, alla conseguenza logica e alle tautologie. E' valida però l'equivalenza $E_i\alpha \leftrightarrow A_i\alpha \wedge B_i\alpha$ (dove A_i è un operatore di consapevolezza introdotto nel linguaggio in modo analogo a quanto fatto nella logica precedente). Per assiomatizzare la logica della consapevolezza generalizzata basta aggiungere questo assioma all'apparato deduttivo per la parte proposizionale e a quello per la credenza implicita, che coincide con l'apparato deduttivo di una logica modale classica[30].

Si possono imporre delle restrizioni sulle funzioni di consapevolezza in modo da formalizzare tipi specifici di ragionamento epistemico limitato. Si può, ad esempio, rendere irrilevante l'ordine dei congiunti ponendo:

$$\alpha \wedge \beta \in A_i(w) \text{ se e solo se } \beta \wedge \alpha \in A_i(w)$$

Oppure si può rendere la consapevolezza chiusa rispetto ai sottoenunciati:

$$\text{se } \alpha \in A_i(w) \text{ e } \beta \text{ è un sottoenunciato di } \alpha, \text{ allora } \beta \in A_i(w)$$

(in tal caso le credenze esplicite risultano chiuse rispetto all'implicazione).

O ancora, si può restringere la consapevolezza ad alcune lettere enunciative, oppure si può rendere un soggetto inconsapevole delle credenze di un altro soggetto, oppure consapevole delle proprie consapevolezze. Ancora, in A_i (w) possono comparire gli enunciati che il soggetto può dedurre in un certo lasso di tempo, oppure di complessità sintattica fino ad un certo grado, e così via. Quindi la logica della consapevolezza generalizzata consente di imporre vincoli sull'insieme delle credenze analoghi a quelli della logica di Konolige (§ 3); in essa tuttavia la componente modellistica della semantica svolge un ruolo meno marginale per la parte modale del linguaggio, ossia nella caratterizzazione degli oggetti credenza.

5.3 Una logica del ragionamento locale.

---

30 Ad esempio, se si assume, con Fagin e Halpern, che le relazioni di accessibilità siano seriali, transitive ed euclidee, allora la credenza implicita è assiomatizzata dagli assiomi del sistema modale $\mathbf{C5_n}$ - ossia **C5** ad n soggetti epistemici.

Il terzo e ultimo sistema proposto da Fagin e Halpern (1988) è una *logica del ragionamento locale*. Essa consente che i soggetti epistemici abbiano credenze contraddittorie senza tuttavia utilizzare situazioni incoerenti nella semantica. Tra le cause della mancanza di onniscienza logica vi è il fatto che i soggetti epistemici non riescono a focalizzare la loro attenzione su tutte le informazioni in loro possesso. L'idea quindi è quella di sviluppare un modello formale in cui le credenze di ciascun agente sono organizzate in quadri mentali separati che non comunicano tra loro. In ogni mondo si assegna a ciascun soggetto epistemico (anziché un unico insieme di mondi alternativi come nelle tradizionali semantiche a mondi possibili) una famiglia di insiemi non vuoti di mondi, ciascuno dei quali, intuitivamente, corrisponde a un possibile quadro mentale del soggetto[31]. In altri termini, per ogni mondo w e per ogni soggetto epistemico i, $C_i(w)$ è una famiglia di insiemi non vuoti di mondi. Ossia $C_i(w) = \{T_1,...,T_k\}$, dove ogni T_j è un insieme di mondi, e corrisponde a uno dei quadri mentali del soggetto i nel mondo w. Una formula del tipo $E_i\alpha$ è vera in un mondo w se e solo se esiste un $T_j \in C_i(w)$ tale che α è vera per ogni $w' \in T_j$. Cioè, il soggetto i crede esplicitamente α se e soltanto se α è vera in tutti i mondi di almeno uno dei quadri mentali che gli sono associati nel mondo w. Per quanto riguarda la credenza implicita, una formula $B_i\alpha$ è vera in w se e solo se α è vera in tutti i mondi w' tali che $w' \in \bigcap_{T \in C_i(w)} T$. Quindi, il soggetto epistemico i crede implicitamente α nel mondo w se e solo se α è vero in tutti i mondi che stanno nell'intersezione di tutti i quadri mentali associati a i nel mondo w (e quindi, evidentemente, è valido $E_i\alpha \to B_i\alpha$). In questa semantica la credenza esplicita non è chiusa rispetto all'implicazione: possono essere creduti esplicitamente α e $\alpha \to \beta$ senza che sia creduto β; ciò accade se α e $\alpha \to \beta$ sono creduti in quadri mentali diversi (è come se il soggetto epistemico non fosse in grado di "mettere assieme" quanto si verifica nei diversi quadri mentali). La credenza esplicita, tuttavia, è chiusa rispetto alle tautologie e alla conseguenza logica (in quanto i mondi sono coerenti e completi): i soggetti epistemici sono ragionatori ideali all'interno di ciascun quadro mentale. Così, ad esempio, possono essere creduti contemporaneamente due enunciati tra loro in contraddizione come α e $\neg\alpha$, ma solo in quadri diversi, e una contraddizione non può essere creduta all'interno dello stesso quadro mentale senza che venga creduto esplicitamente qualsiasi enunciato.

E' interessante notare che, per quanto riguarda la credenza esplicita, la logica descritta in questo paragrafo equivale a una logica dei modelli minimali (§ 2): gli operatori E_i di credenza esplicita della logica del ragionamento locale si comportano come l'operatore B della logica dei modelli minimali che estende **E** con gli assiomi (AM) e (AN) e con l'assioma $\neg B(\alpha \wedge \neg \alpha)$[32].

6. Conclusioni

La rassegna dei paragrafi precedenti rivela quanto siano eterogenee le soluzioni al problema dell'onniscienza logica che sono state proposte in vari ambiti (filosofia, semantica modellistica, intelligenza artificiale). E' interessante notare come proposte che originariamente erano state interpretate come alternative per la soluzione del problema dell'onniscienza logica si sono rivelate come vie per affrontare alcune delle varie sfaccettature di un fenomeno complesso, le cui cause sono differenziate e di diversa natura. Tra le cause della mancanza di onniscienza logica possiamo annoverare le seguenti[33].

---

[31] Proposte che vanno in questa direzione sono state avanzate, in maniera più o meno formalizzata, da Rescher e Brandom (1980), Lewis (1982) e Stalnaker (1984).

[32] Cfr. (Vardi 1986). Questa logica risulta equivalente anche al sistema proposto in (Rescher e Brandom 1980).

[33] Cfr. Fagin e Halpern 1988.

- *Mancanza di consapevolezza.* Può accadere che un soggetto non abbia opinioni circa la verità o la falsità di un enunciato che segue logicamente dall'insieme delle sue credenze per la semplice ragione che nella formulazione di quell'enunciato compaiono termini che non conosce, di modo che egli non è consapevole della verità o falsità dell'enunciato stesso.
- *Risorse limitate.* Un soggetto razionale può ignorare certe verità logiche, o non conoscere alcune delle conseguenze logiche delle sue credenze perché non dispone del tempo o delle risorse di memoria per dedurle. Oppure perché sono formulate in maniera troppo complessa perché possa comprenderle.
- *Ignoranza di regole di derivazione.* Spesso i ragionatori reali non conoscono o non sanno applicare alcune regole di ragionamento. Ad esempio, alcune ricerche in psicologia cognitiva hanno messo in luce le difficoltà di molti soggetti nell'utilizzare la regola di contrapposizione.
- *Molteplicità dei contesti mentali.* Nel ragionamento i soggetti non utilizzano contemporaneamente tutte le informazioni di cui dispongono. Sembra che gli esseri umani abbiano difficoltà nell'utilizzare contemporaneamente informazioni che provengono da ambiti diversi. Sembra ragionevole pensare la memoria umana come strutturata in contesti diversi, in diversi "quadri mentali", che difficilmente comunicano fra loro.

Ciascuna delle logiche dei paragrafi precedenti può essere vista come un tentativo di affrontare qualcuno di questi aspetti. In questa prospettiva, soluzioni diverse possono essere variamente combinate tra loro. Poiché ad esempio ragionamento locale e consapevolezza possono essere considerate due diverse cause della mancanza di onniscienza logica si possono definire delle logiche ibride che combinino nella loro semantica il meccanismo dei quadri mentali con quello delle funzioni di consapevolezza.

Tale natura complessa ed eterogenea del fenomeno è probabilmente l'aspetto più interessante emerso dalle ricerche qui descritte. Da ciò segue l'implausibilità di un meccanismo semantico uniforme che consenta di rendere conto del ragionamento epistemico, di un livello specifico di entità semantiche che possa garantire la sostituibilità *salva veritate* nei contesti epistemici (e, presumibilmente, negli altri contesti di atteggiamento proposizionale). Vista in questi termini, la mancanza di onniscienza logica si configura sempre meno come un problema *semantico*, e si collega piuttosto al problema più generale dei limiti nelle capacità inferenziali dei soggetti cognitivi.

Riferimenti bibliografici

Anderson A.R. e Belnap N.D. (1962). "Tautological entailment", *Philosophical Studies*, 13, pp. 9-24.

Barwise, J. (1981). "Scenes and other situations", *The Journal of Philosophy*, 78, pp. 369-397. Tr. it. in A. Bottani, C. Penco (a cura di), *Significato e teorie del linguaggio*, Franco Angeli, Milano, 1991.

Barwise, J. e Perry, J. (1983). Situations and Attitudes, MIT Press, Boston (MA).

Bäuerle M. J., Cresswell M.J. (1988). "Propositional attitudes", in D. Gabbay, F. Guenthner (a cura di), *Handbook of Philosophical Logic*, Volume IV: *Topics in the Philosophy of Language*, Reidel, Dordrecht-Boston, pp. 491-512

Belnap, N.D. (1975). "How a computer should think", in *Contemporary Aspects of Philosophy. Proceedings of the Oxford International Symposium*, Oxford, UK, pp. 30-56.

Belnap, N.D. (1977). "A useful four valued logic", in G. Epstein e G.M. Dunn (a cura di), *Modern Uses of Multiple-Valued Logics*, Reidel, Boston (MA), pp. 8-37.

van Benthem, J. (2001) (a cura di). *Theoretical Aspects of Rationality and Knowledge. Proc. of the 8th TARK Conference*, Morgan Kaufmann Pub.

Cadoli M. e Schaerf M. (1992). "Approximate reasoning and non-omniscient agents", *Proc. TARK-92*, pp. 169-183.

Carnap R. (1947). *Meaning and Necessity*, University of Chicago Press, Chicago.

Chellas B. F. (1980), *Modal Logic. An Introduction*, Cambridge University Press, Cambridge.

Cresswell M.J. (1975). "Hyperintensional logic", *Studia Logica*, 34, pp. 25-38.

des Rivieres, J. e Levesque, H. (1986). "The consistency of syntactical treatments of knowledge", *Proc. TARK-8*6, Monterey (CA), pp. 115-130.

Fagin R., Halpern J. Y. (1988). "Belief, awareness and limited reasoning", *Artificial Intelligence* 34 (1988), pp. 39-76.

Fagin R., Halpern J.Y., Moses, Y., Vardi M. (1995). *Reasoning About Knowledge*, MIT Press, Boston (MA).

Frege G. (1892). "Über Sinn und Bedeutung", *Zeitschrift für Philosophie un philosophische Kritik*, 100, pp. 25-50. Tr. it. in G. Frege, *Senso, funzione e concetto. Scritti filosofici*, a cura di C. Penco ed Eva Picardi, Laterza, Bari, 2001.

Frixione M. (1994). *Logica, significato e intelligenza artificiale*, Franco Angeli, Milano.

Frixione M. (2001). "Tractable competence", *Minds and Machines*, Vol.11, No. 3, pp. 379-397.

Gilboa, I. (1998) (a cura di). *Theoretical Aspects of Rationality and Knowledge. Proc. of the 7th TARK Conference*, Morgan Kaufmann Pub.

Hintikka J. (1962). *Knowledge and Belief. An Introduction to the Logic of the Two Notions*, Cornell University Press, Ithaca-New York, 1962.

Hintikka J. (1971). "Semantics for propositional attitudes", in (Linsky 1971), pp.185-213.

Hugues G.E., Cresswell M.J. (1996). *A New Introduction to Modal Logic*, Routledge, London New York.

Konolige K. (1986). *A Deduction Model of Belief*, Morgan Kaufmann, Los Altos CA, 1986.

Kripke S. (1963). "Semantical considerations on modal logic", *Acta Philosophica Fennica*, 16, 83-89; anche in (Linsky 1971).

Lakemeyer G. (1987). "Tractable meta-reasoning in propositional logics of belief", in *Proceedings of the tenth International Joint Conference on Artificial Intelligence*, Milano, 1987, pp. 402-408.

Lakemeyer G. (1994). "Limited Reasoning in first-order knowledge bases", *Artificial Intelligence*, 71, pp. 1-42.

Levesque H.J. (1984). "A logic of implicit and explicit belief", in *Procceedings of the National Conference on Artificial Intelligence*, Austin (Texas), 1984, pp. 198-202.

Levesque H.J. (1988). "Logic and the complexity of reasoning", *Journal of Philosophical Logic*, 17, pp. 355-389.

Levesque H.J. e Lakemeyer G. (2001). *The Logic of Knowledge Bases*, MIT Press, Boston (MA).

Lewis D. (1982). "A logic for equivocators", *Noûs*, 16, pp. 431-441.

Linsky L. (a cura di) (1971). *Reference and Modality*, Oxford University Press, Oxford; trad. it., *Riferimento e modalità*, Bompiani, Milano, 1974.

Meyer J.-J. Ch. (2001). “Epistemic logic”, in L. Goble (a cura di), *The Blackwell Guide to Philosophical Logic*, Blackwell, Oxford (UK).

Montague R. (1968). “Pragmatics”, in (Montague 1974), pp. 95-118.

Montague R. (1974). *Formal Philosophy*, a cura di R. Thomason, Yale University Press, Londra.

Moore R.C. e Hendrix G.G. (1982). “Computational models of belief and the semantics of belief sentences”, in S. Peters e E. Saarinen (a cura di), *Processes, Beliefs and Questions*, Reidel, Dordrecht e Boston, pp. 107-127.

Rescher N. e Brandom R. (1980). *The Logic of Inconsistency*, Basil Blackwell, London.

Schaerf M. e Cadoli M. (1995). “Tractable reasoning via approximation”, *Artificial Intelligence*, 74 (2), pp. 249-310.

Scott D. (1970). “Advice on modal logic”, in K. Lambert (a cura di), *Philosophical Problems in Logic*, Reidel, Boston (MA), pp. 143-173.

Stalnaker, R.C. (1984). *Inquiry*, MIT Press, Boston (MA).

Thomason, R. (1980). “A note on syntactical treatments of modality”, *Synthes*e, 44, pp. 391-5.

Vardi M. (1986). “On epistemic logic and logical omniscience”, *Proceedings of the Conference on Theoretical Aspects of Reasoning about Knowledge*, Monterey CA, Morgan Kaufmann, Los Altos (CA), pp. 293-305.