Alcune inferenze

(1) *Mario è architetto oppure è geometra.* (premessa)
Se Mario fosse architetto, allora Mario sarebbe laureato. “
Mario non è laureato. “
Quindi: *Mario è geometra.* (conclusione)

(2) *Giovanni Paolo II è siciliano.*
Tutti i siciliani sono giardinieri.
Quindi: *Giovanni Paolo II è giardiniere*.

(3) *Tutti i cigni osservati sino ad ora in Europa sono bianchi.* […]
Non sono stati mai osservati cigni che non fossero bianchi.
Quindi: *Tutti i cigni sono bianchi.*

(4) *L’assassino ha sporcato di fango il tappeto.*
Chiunque fosse entrato dal giardino avrebbe sporcato di fango il tappeto.
Quindi: *L’assassino è entrato dal giardino.*

(5) *Gli uccelli, salvo eccezioni, sono in grado di volare.*
Titti è un uccello.
Quindi: *Titti è in grado di volare.*

A	$\neg A$
V	F
F	V

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	F	V	V
F	F	F	F	V

esempio:

1) $a \vee g$ (“Mario è architetto oppure è geometra”)
2) $a \rightarrow l$ (“Se Mario fosse architetto, allora Mario sarebbe laureato”)
3) $\neg l$ (“Mario non è laureato”)
4) g (“Mario è geometra”)

Alcune leggi logiche:

$\neg(A \wedge B)$	equivale a	$\neg A \vee \neg B$	(*de Morgan*)
$\neg(A \vee B)$	equivale a	$\neg A \wedge \neg B$	(*de Morgan*)
$\neg\neg A$	equivale a	A	(*idempotenza*)
$A \wedge B$	equivale a	$B \wedge A$	(*commutatività di* $\wedge$)
$A \vee B$	equivale a	$B \vee A$	(*commutatività di* $\vee$)
$(A \wedge B) \wedge C$	equivale a	$A \wedge (B \wedge C)$	(*associatività di* $\wedge$)
$(A \vee B) \vee C$	equivale a	$A \vee (B \vee C)$	(*associatività di* $\vee$)
$A \wedge (B \vee C)$	equivale a	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	
$A \vee (B \wedge C)$	equivale a	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$	(*leggi distributive*)

inoltre:

$$A \rightarrow B \text{ è equivalente a } \neg A \vee B \qquad (*)$$

come risulta dalla seguente tavola di verità:

A	B	A	→	B	¬	A	∨	B
V	V	V	**V**	V	F	V	**V**	V
V	F	V	**F**	F	F	V	**F**	F
F	V	F	**V**	V	V	F	**V**	V
F	F	F	**V**	F	V	F	**V**	F

***clausola*:**

$$L_1 \vee L_2 \vee \ldots \vee L_n$$

con L_i = lettera proposizionale oppure lettera proposizionale negata (L_i: *letterali*)

Utilizzando (*) e le leggi logiche sopra enunciate si può trasformare qualsiasi insieme di formule proposizionali in un insieme di clausole.

Esempi:

$(a \wedge b) \rightarrow c$	formula di partenza
$\neg (a \wedge b) \vee c$	per (*)
$\neg a \vee \neg b \vee c$	per De Morgan

$a \rightarrow \neg(b \wedge c)$	formula di partenza
$\neg a \vee \neg (b \wedge c)$	per (*)
$\neg a \vee (\neg b \vee \neg c)$	per De Morgan
$\neg a \vee \neg b \vee \neg c$	per l'associatività di $\vee$

$(a \vee b) \rightarrow c$	formula di partenza
$\neg (a \vee b) \vee c$	per (*)
$(\neg a \wedge \neg b) \vee c$	per De Morgan
$(\neg a \vee c) \wedge (\neg b \vee c)$	per la distributività di $\vee$.

$(\neg a \vee c) \wedge (\neg b \vee c)$ equivale all'insieme di clausole: $\{ \neg a \vee c, \neg b \vee c \}$

$(a \rightarrow b) \rightarrow c$	formula di partenza
$\neg (\neg a \vee b) \vee c$	per (*) (applicata due volte)
$\neg\neg (a \wedge \neg b) \vee c$	per De Morgan e idempotenza
$(a \wedge \neg b) \vee c$	per l'idempotenza
$(a \vee c) \wedge (\neg b \vee c)$	per le leggi distributive e la commutatività di $\vee$

$(a \vee c) \wedge (\neg b \vee c)$ equivale all'insieme: $\{ a \vee c, \neg b \vee c \}$

regola di risoluzione

$$\frac{A_1 \vee \ldots \vee A_n \vee B \qquad \neg B \vee C_1 \vee \ldots \vee C_m}{A_1 \vee \ldots \vee A_n \vee C_1 \vee \ldots \vee C_m}$$

A	B	C	A	$\vee$	B	$\neg$	B	$\vee$	C	A	$\vee$	C
V	V	V	**V**	**V**	**V**	**F**	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**
V	V	F	V	V	V	F	V	F	F	V	V	F
V	F	V	**V**	**V**	**F**	**V**	**F**	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**
V	F	F	**V**	**V**	**F**	**V**	**F**	**V**	**F**	**V**	**V**	**F**
F	V	V	**F**	**V**	**V**	**F**	**V**	**V**	**V**	**F**	**V**	**V**
F	V	F	F	V	V	F	V	F	F	F	F	F
F	F	V	F	F	F	V	F	V	V	F	V	V
F	F	F	F	F	F	V	F	V	F	F	F	F

casi particolari della regola di risoluzione:

$$\frac{B \qquad\qquad \neg B \vee C_1 \vee \ldots \vee C_m}{C_1 \vee \ldots \vee C_m} \qquad\qquad \frac{A_1 \vee \ldots \vee A_n \vee B \qquad\qquad \neg B}{A_1 \vee \ldots \vee A_n}$$

$$\frac{B \qquad \neg B}{\perp}$$

($\perp$: clausola vuota = contraddizione)

$$\frac{\neg A \vee B \qquad A}{B} \qquad\qquad \frac{\neg A \vee B \qquad \neg B}{\neg A}$$

ossia, in virtù di (*):

$$\frac{A \to B \qquad A}{B} \qquad\qquad \frac{A \to B \qquad \neg B}{\neg A}$$

(*Modus Ponens*) (*Modus Tollens*)

$$\frac{\neg A \vee B \qquad \neg B \vee C}{\neg A \vee C} \quad \text{ossia, in virtù di (*)}: \quad \frac{A \to B \qquad B \to C}{A \to C}$$

$$\frac{\neg A_1 \vee \neg A_2 \vee \ldots \vee \neg A_n \vee B \qquad A_1}{\neg A_2 \vee \ldots \vee \neg A_n \vee B} \quad \text{ossia, in virtù di (*)}: \quad \frac{A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \to B \qquad A_1}{A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \to B}$$

Regola di risoluzione Þ metodo generale di inferenza basato sulla *refutazione*

Esempio - Neghiamo la conclusione, e trasformiamo in clausole le premesse e la negazione della conclusione:

1) $a \vee g$ 2) $\neg a \vee l$ 3) $\neg l$ 4) $\neg g$

Con la regola di risoluzione mostriamo mediante refutazione che l'inferenza è corretta:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg a \vee l \qquad \neg l}{\neg a} \qquad a \vee g}{g} \qquad \neg g}{\perp}$$

Altro esempio:

1) *Se piove mi bagno*
2) *Se nevica ho freddo*
Quindi:
3) *se piove oppure nevica mi bagno oppure ho freddo*

1) $p \rightarrow b$
2) $n \rightarrow f$
3) $p \vee n \rightarrow b \vee f$

Aggiungo alle premesse la negazione della conclusione:

$$p \rightarrow b$$
$$n \rightarrow f$$
$$\neg (p \vee n \rightarrow b \vee f)$$

$\neg (p \vee n \rightarrow b \vee f)$ equivale all'insieme di clausole $\{p \vee n, \neg b, \neg f\}$:

$\neg (\neg (p \vee n) \vee (b \vee f))$	per (*)
$\neg \neg (p \vee n) \wedge \neg (b \vee f)$	per De Morgan
$(p \vee n) \wedge \neg (b \vee f)$	per l'idempotenza di $\neg$
$(p \vee n) \wedge \neg b \wedge \neg f$	per De Morgan

usando la risoluzione:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg p \vee b \qquad \neg b}{\neg p} \qquad p \vee n}{n} \qquad \neg n \vee f}{f} \qquad \neg f}{\bot}$$

Logica dei predicati

Dato il sillogismo:

Tutti gli uomini sono mortali. Socrate è un uomo. **Quindi:** *Socrate è mortale.*

nel linguaggio della logica dei predicati:

$\forall x(Uomo(x) \rightarrow Mortale(x))$
$Uomo(socrate)$
Quindi:
$Mortale(socrate)$

aggiungendo alle premesse la negazione della conclusione:

1) $\forall x(Uomo(x) \rightarrow Mortale(x))$
2) $Uomo(socrate)$
3) $\neg\, Mortale(socrate)$

in forma a clausole:

1) $\neg Uomo(x) \vee Mortale(x)$
2) $Uomo(socrate)$
3) $\neg\, Mortale(socrate)$

applicando la risoluzione:

$$\cfrac{\cfrac{\neg Uomo(x) \vee Mortale(x) \quad Uomo(socrate)}{Mortale(socrate)}[x = socrate] \qquad \neg Mortale(socrate)}{\perp}$$

(si noti l'***unificazione***)

una variante dell'esempio precedente:

Tutti gli uomini sono mortali. Socrate è un uomo. **Quindi:** *qualche uomo è mortale.*

nel linguaggio della logica dei predicati (e aggiungendo alle premesse la concl. negata):

1) $\forall x(Uomo(x) \rightarrow Mortale(x))$ 2) $Uomo(socrate)$ 3) $\neg\exists y\,(Mortale(y))$

per l'interdefinibilità dei quantificatori, 3) diventa: $\forall x\,\neg Mortale(x)$

per cui, **in clausole:**

1) $\neg Uomo(x) \vee Mortale(x)$ 2) $Uomo(socrate)$ 3) $\neg\, Mortale(y)$

applicando la risoluzione:

$$\cfrac{\cfrac{\neg Uomo(x) \vee Mortale(x) \qquad Uomo(socrate)}{Mortale(socrate)}\,[x = socrate] \qquad \neg Mortale(y)}{\perp}\,[x = y = socrate]$$

Backtracking

Un nuovo esempio - Premesse:

1) $\forall x(Cane(x) \wedge Basso(x) \rightarrow Bassotto(x))$
2) $Cane(fido)$
3) $Cane(pluto)$
4) $Basso(pluto)$

Ne segue che $\exists y\ (Bassotto(y))$?

Aggiungendo a 1-4) la negazione di $\exists y\ (Bassotto(y))$ e traducendo in clausole:

1) $\neg Cane(x) \vee \neg Basso(x) \vee Bassotto(x))$
2) $Cane(fido)$
3) $Cane(pluto)$
4) $Basso(pluto)$
5) $\neg Bassotto(y)$

Applicando la reg. di risoluzione unificando x con *fido*:

$$\cfrac{\cfrac{\neg Cane(x) \vee \neg Basso(x) \vee Bassotto(x) \quad Cane(fido)}{\neg Basso(fido) \vee Bassotto(fido)}[x = fido] \qquad \neg Bassotto(y)}{\neg Basso(fido)}[x = y = fido]$$

Si può “smontare” l’unificazione di x con *fido* e provare a unificare x con *pluto*:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\neg Cane(x) \vee \neg Basso(x) \vee Bassotto(x) \quad Cane(pluto)}{\neg Basso(pluto) \vee Bassotto(pluto)}[x = pluto] \qquad Basso(pluto)}{Bassotto(pluto)} \qquad \neg Bassotto(y)}{\perp}[x = y = plut$$

Il *backtracking* si può causare "artificialmente" per di ottenere ulteriori risposte.
Ad esempio:

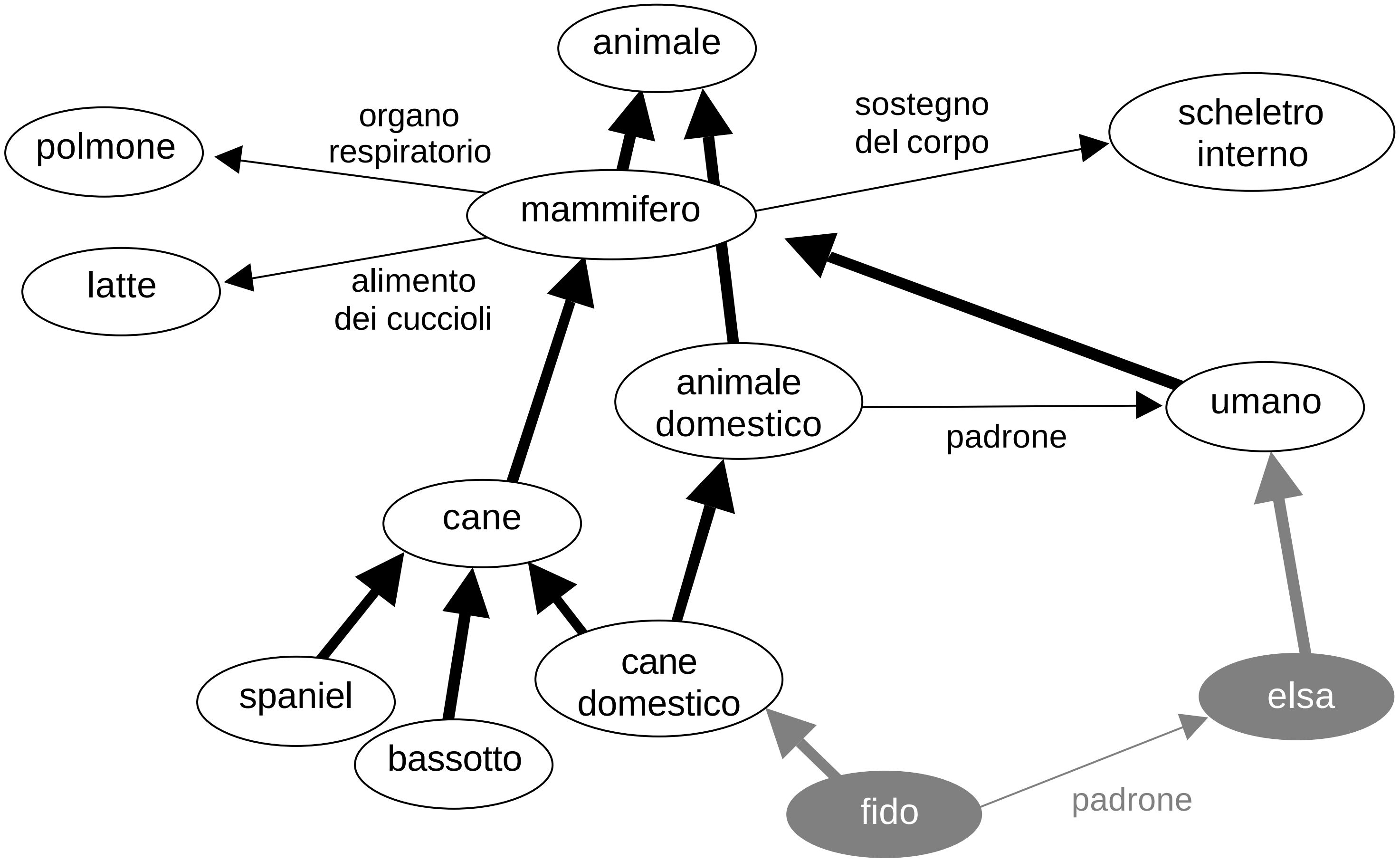
1) $\forall x(Cane(x) \land Basso(x) \rightarrow Bassotto(x))$
2) $Cane(fido)$
3) $Cane(pluto)$
4) $Cane(cerbero)$
5) $Basso(pluto)$
6) $Basso(cerbero)$

insieme di clausole:

1) $\neg Cane(x) \lor \neg Basso(x) \lor Bassotto(x))$
2) $Cane(fido)$
3) $Cane(pluto)$
4) $Cane(cerbero)$
5) $Basso(pluto)$
6) $Basso(cerbero)$
7) $\neg Bassotto(y)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg Cane(x) \vee \neg Basso(x) \vee Bassotto(x) \quad Cane(cerbero)}{\neg Basso(cerbero) \vee Bassotto(cerbero)}[x = cerbero] \quad Basso(cerbero)}{Bassotto(cerbero)} \quad \neg Bassotto(y)}{\perp}[x = y = cerbero]$$

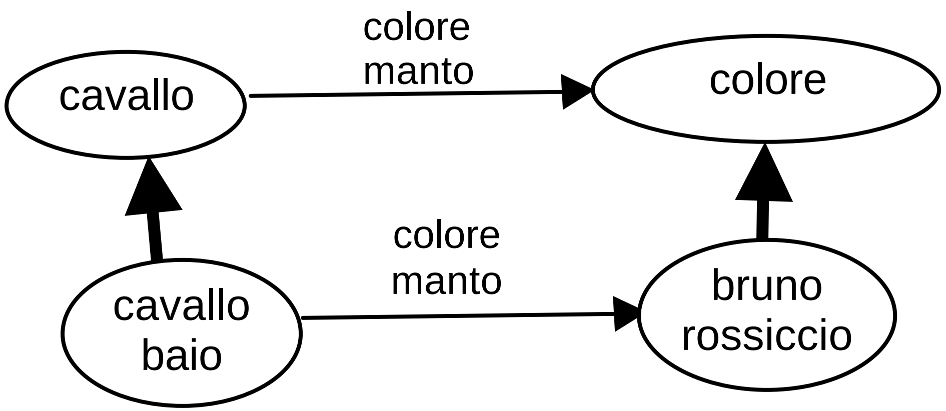
Rappresentazioni strutturate: le <u>reti semantiche</u>



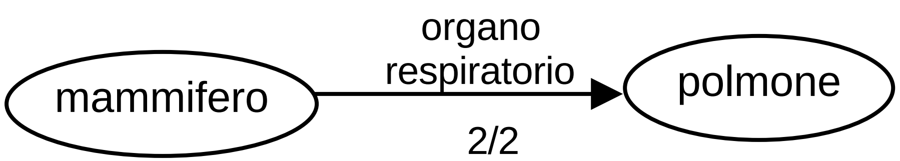
- *concetti generici*
- *concetti individuali*

- archi di *sussunzione* (archi *isa*)
- Archi che rappresentano gli *attributi di un concetto generico*
- Archi di *istanziazione*
- Archi che rappresentano gli *attributi di un concetto individuale*

ereditarietà:



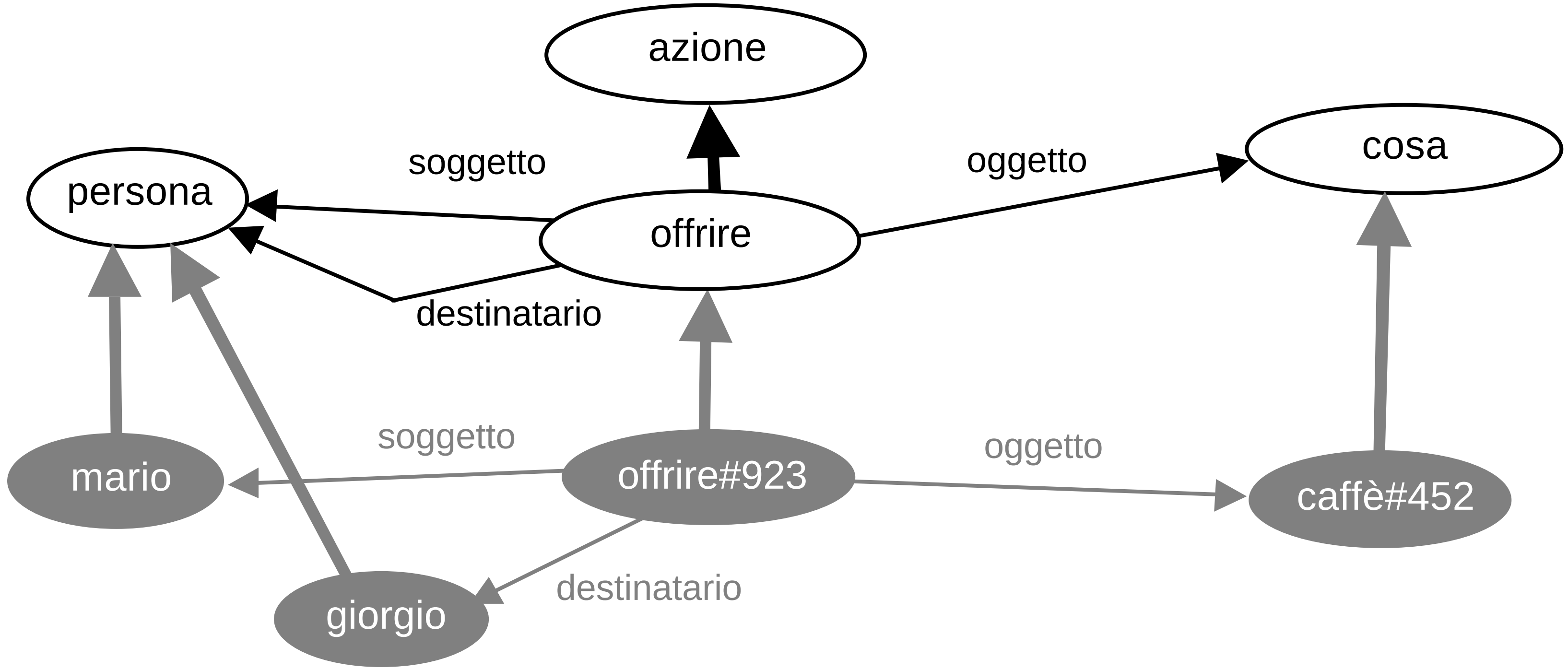
restrizioni di numero:



Traduzione delle reti nel linguaggio della logica dei predicati:

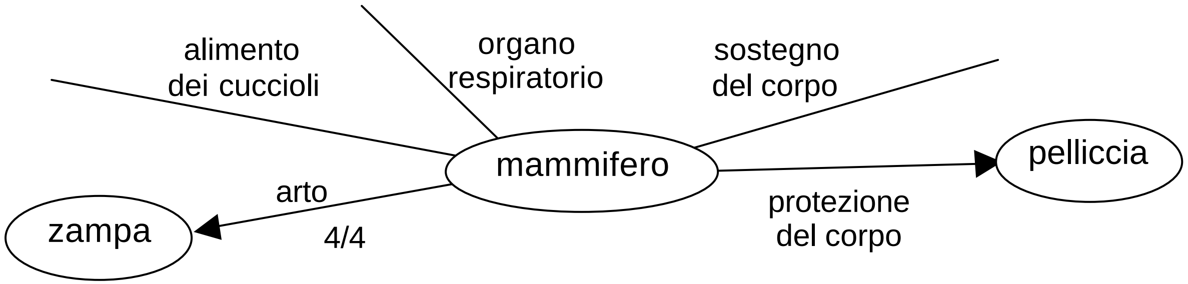
- ***concetti generici*** $\Rightarrow$ lettere predicative a un argomento
- ***concetti individuali*** $\Rightarrow$ costanti individuali
- ***attributi* dei concetti generici** $\Rightarrow$ lettere predicative a due argomenti
  $$\forall x(Animale\_domestico(x) \rightarrow \exists y\, Padrone(x, y) \wedge \forall z(Padrone(x, z) \rightarrow Umano(z))$$
- ***archi di sussunzione***: $\forall x(Cane(x) \rightarrow Mammifero(x))$
- ***archi di istanziazione*:** $Cane\_domestico(fido)$
- **attributi dei concetti individuali:** $Padrone(fido, elsa)$

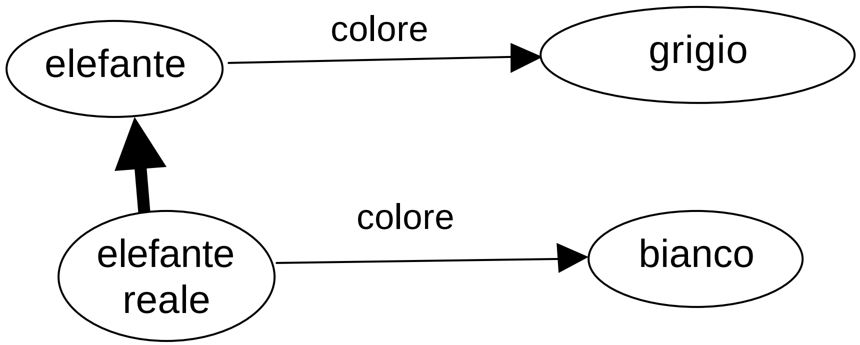
Relazioni a più di due argomenti



Cosa <u>non possono</u> rappresentare <u>queste</u> reti semantiche: *negazione*, *disguinzione*, la *quantificazione* nella sua generalità

Rappresentazione di <u>eccezioni</u>:





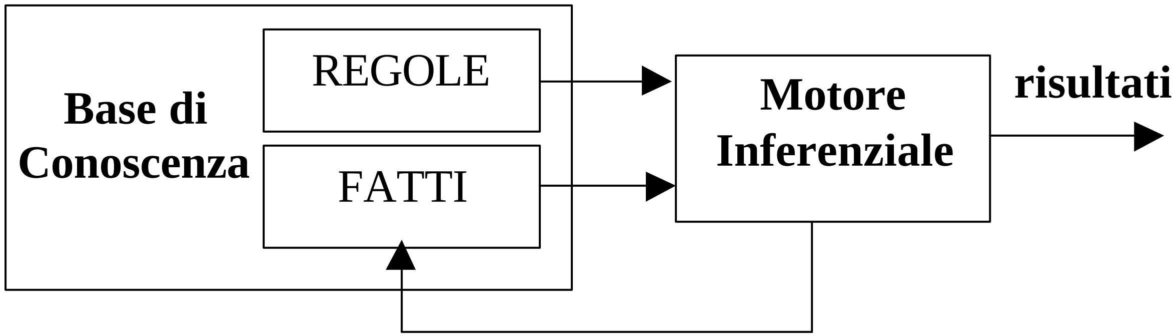
Ragionamento per *default*, prototipi, *frame*

nome del frame:	***essere umano***
è un:	***primate***
…	*…*
arto superiore:	***braccio** (card.: 2)*
arto inferiore:	***gamba** (card.: 2)*
…	*…*
data di nascita:	*(giorno/mese/anno)*
età (in anni):	*(compresa tra 0 e 100)*
…	*…*
genitore:	***essere umano** (card.: 2)*
antenato:	***essere umano***
…	*…*

nome del frame:	***Davide Limentani***
è un:	***essere umano***
…	*…*
data di nascita:	*4/ottobre/1956*
età (in anni):	*44*
…	*…*
genitore:	***Isacco Limentani***
	Sara Piperno
antenato:	***Daniele Limentani***
	Lia Sonnino
	Davide Piperno
…	…

Regole di produzione

se *condizione* **allora** *effetto*



i) **se** *mammifero* **e** *unghie_retrattili* **allora** *felino*
ii) **se** *felino* **e** *domestico* **allora** *gatto*
iii) **se** *vive_in_allevamento* **allora** *domestico*
iv) **se** *vive_in_appartamento* **allora** *domestico*
v) **se** *coperto_di_pelo* **allora** *mammifero*

se *Informazione_richiesta*(*x*) **e** *Riservata*(*x*) **e** *utente_non_autorizzato*
allora *Stampa*("L'informazione richiesta non può essere visualizzata")

se *emergenza_grave* **e** *incaricato_assente* **allora** *Esegui*(*spegni_impianto*)

se *Asserito*(*Celebrato_matrimonio_tra*(*x*, *y*)) **allora** *Cancella*(*Celibe*(*x*))

<u>inferenze abduttive:</u> regole usate "all'indietro":

se *manca_corrente* **allora** *lampadina_spenta*