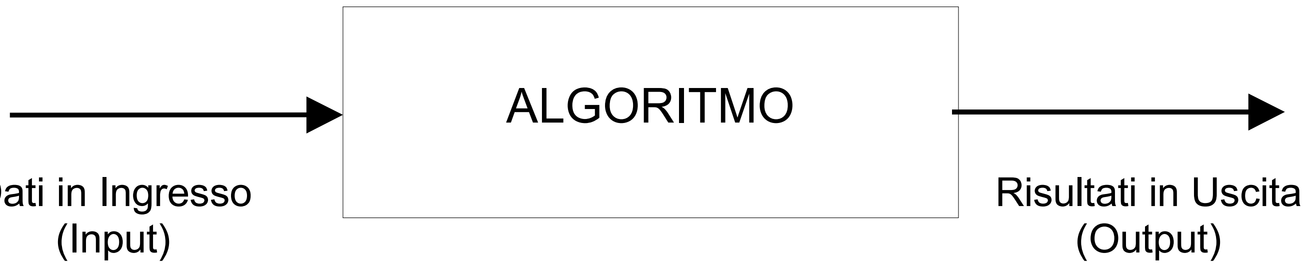
Algoritmi, macchine, grammatiche - Prima parte:
Il concetto di algoritmo

Che cos’è un algoritmo (metodo effettivo)



Ad esempio:

- prendi in input la lunghezza A del primo cateto
- prendi in input la lunghezza B del secondo cateto
- calcola il quadrato di A
- calcola il quadrato di B
- somma i due quadrati
- estrai la radice quadrata del valore così ottenuto
- produci in output quest’ultimo valore

In generale:

- insieme finito di istruzioni;
- la soluzione (se esiste) si ottiene applicando le istruzioni un numero finito di volte;
- in ogni momento deve sempre essere specificato quale istruzione va eseguita al passo successivo (determinismo);
- deve essere chiaro se il procedimento è terminato

Esempio 1 - Determinare se una parola è *palìndroma*:

<u>o</u>ssess<u>o</u>

<u>s</u>ses<u>s</u>

…

Esempio 2 - Cercare un elemento *N* in un elenco ordinato

- **Algoritmo ovvio:** scorrere tutto l'elenco

- **Un algoritmo migliore:** *ricerca binaria* - Si confronta N con il nome che si trova a metà dell'elenco (ossia in posizione $quoz(n, 2) + 1$)

Tre possibilità:

(*a*) il nome a metà dell'elenco coincide con N
(*b*) il nome a metà dell'elenco segue N in ordine alfabetico
(*c*) il nome a metà dell'elenco precede N in ordine alfabetico

- Se si verifica (*a*) la ricerca ha avuto successo, e il procedimento è terminato.
- Se si verifica (*b*), allora se N è nell'elenco, deve trovarsi nella sua metà iniziale. Ripetiamo quindi il procedimento sulla prima metà dell'elenco.
- Se si verifica (*c*), il procedimento va eseguito sulla seconda metà dell'elenco.

L'algoritmo euclideo per il calcolo del massimo comun divisore

Vogliamo determinare il MCD di 2079 e 987.

Dividendo 2079 per 987 otteniamo come quoziente 2 e come resto 105:

$$2079 = 987 \cdot 2 + 105$$

Dividiamo ora 987 per 105. Si ha: $987 = 105 \cdot 9 + 42$

Procediamo dividendo 105 per 42: $105 = 42 \cdot 2 + 21$

Dividiamo ora 42 per 21: $42 = 21 \cdot 2 + 0$

Siamo pervenuti a un resto nullo.

L'ultimo divisore, in questo caso 21, è il MCD cercato.

Quindi MCD(2079, 987) = 21.

Calcoliamo ora MCD(2835, 1540).

Dividiamo 2835 per 1540: $2835 = 1540 \cdot 1 + 1295$

dividiamo 1540 per 1295: $1540 = 1295 \cdot 1 + 245$

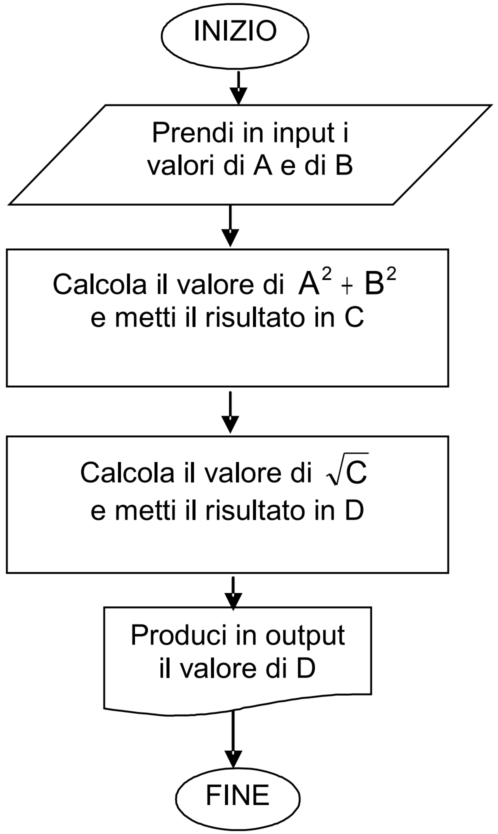
dividiamo 1295 per 245: $1295 = 245 \cdot 5 + 70$

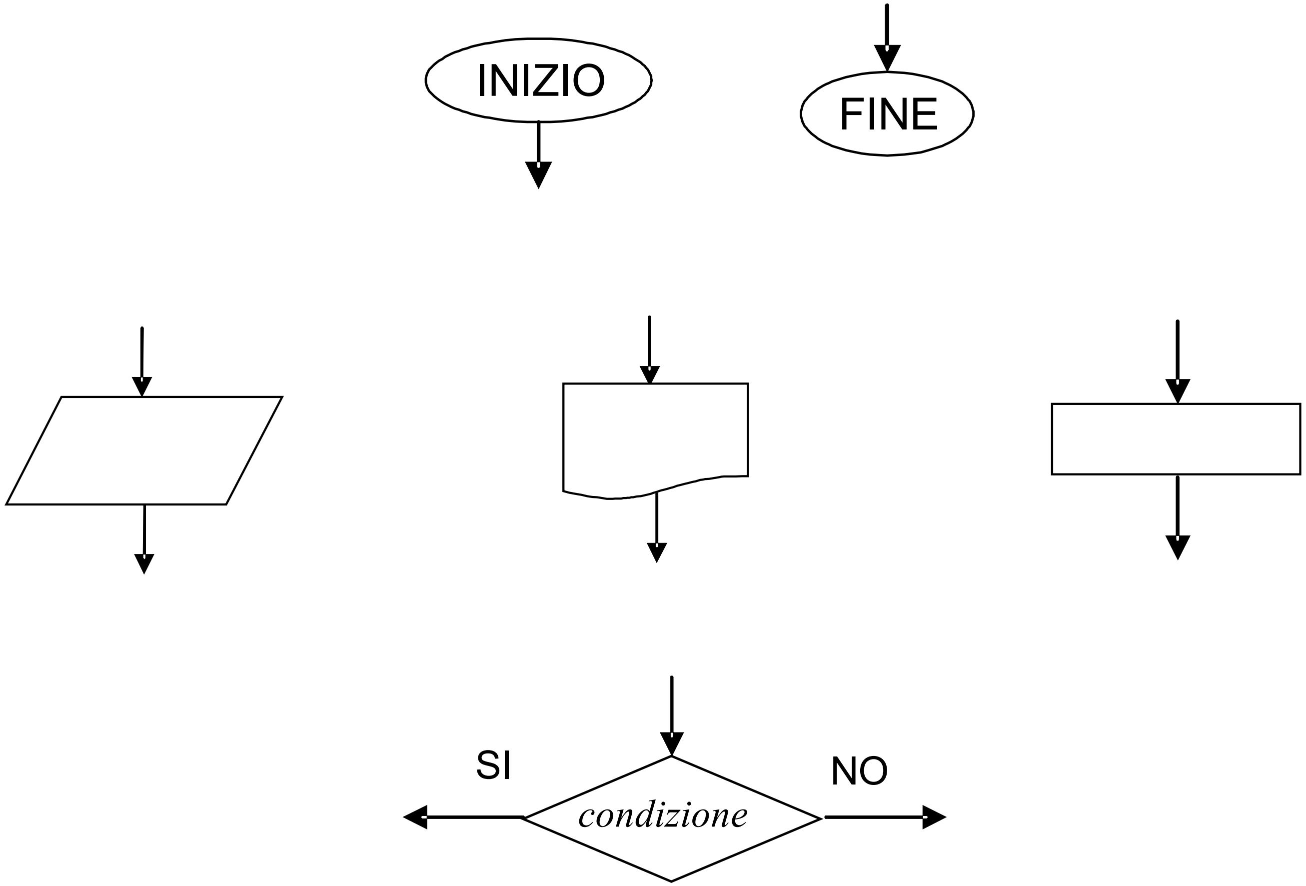
dividiamo 245 per 70: $245 = 70 \cdot 3 + 35$

dividiamo 70 per 35: $70 = 35 \cdot 2 + 0$

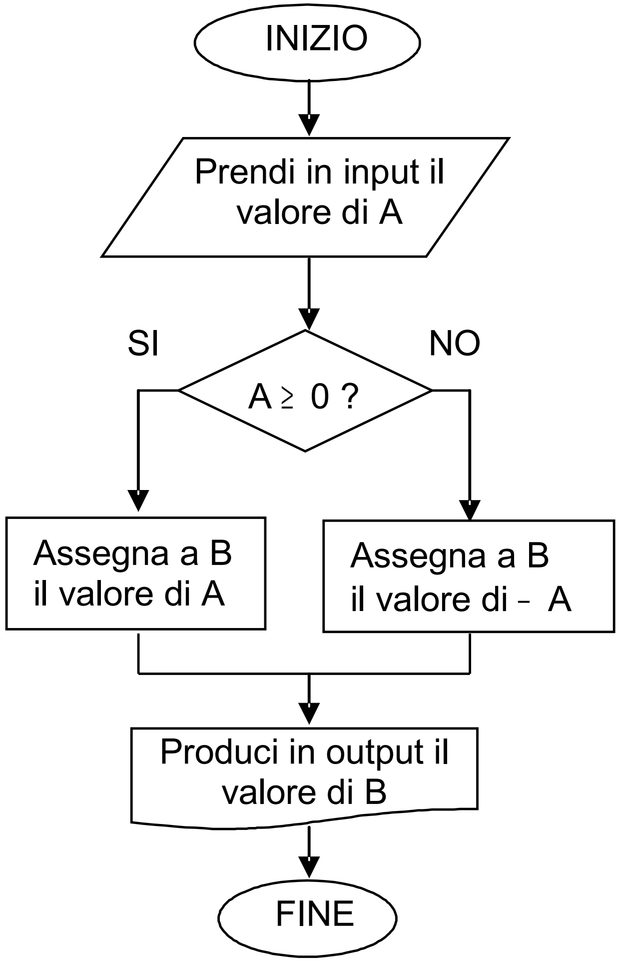
Il resto è 0, per cui MCD(2835, 1540) = 35.

Diagrammi di flusso



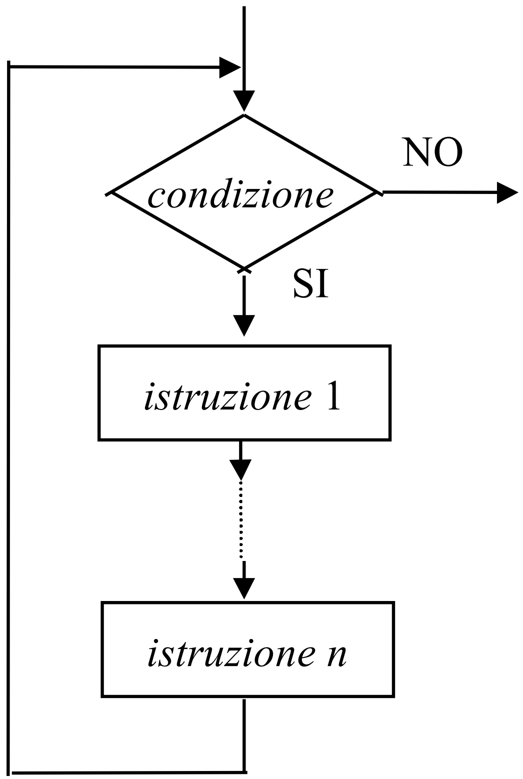

INIZIO
FINE
SI
condizione
NO

Valore assoluto:

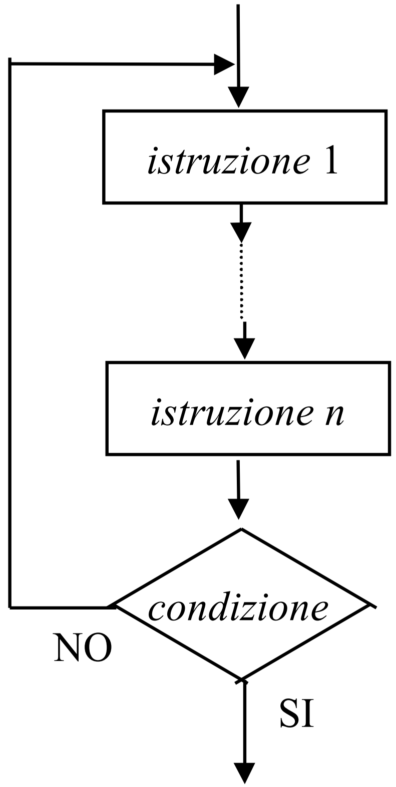


Cicli:

a)


NO
condizione
SI
istruzione 1
istruzione n

b)


istruzione 1
istruzione n
condizione
NO
SI

Algoritmo che calcola il prodotto di due numeri (assumendo come nota l'addizione)

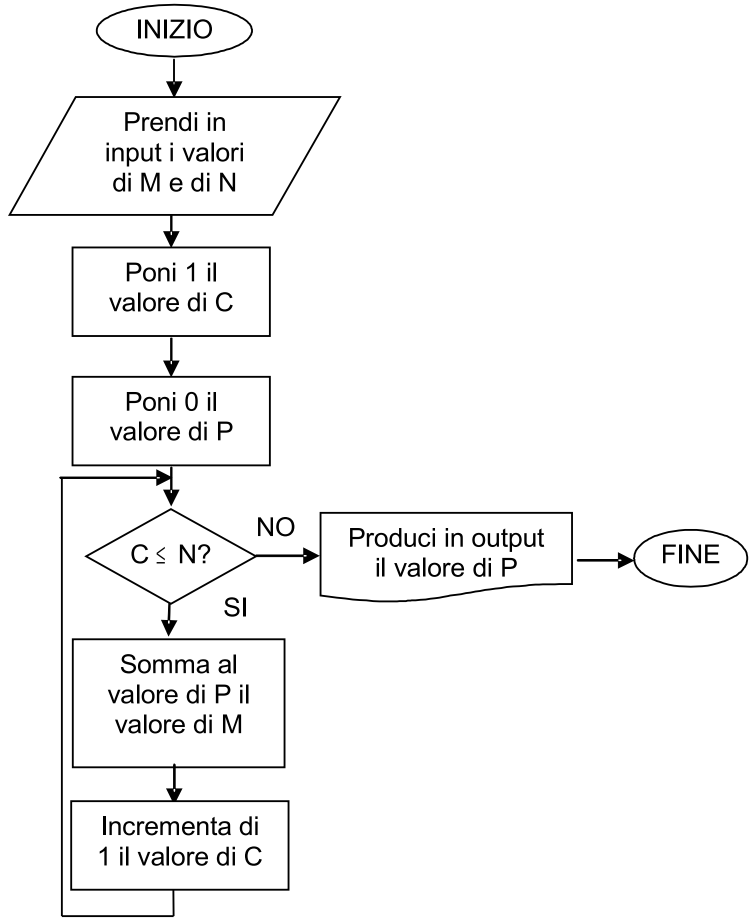
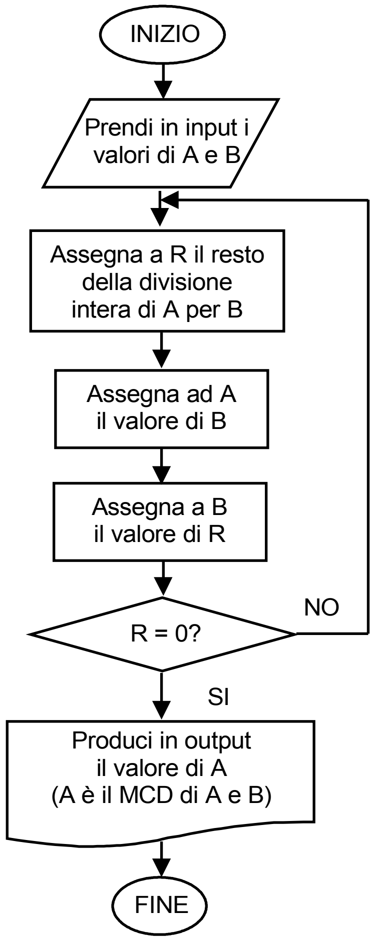
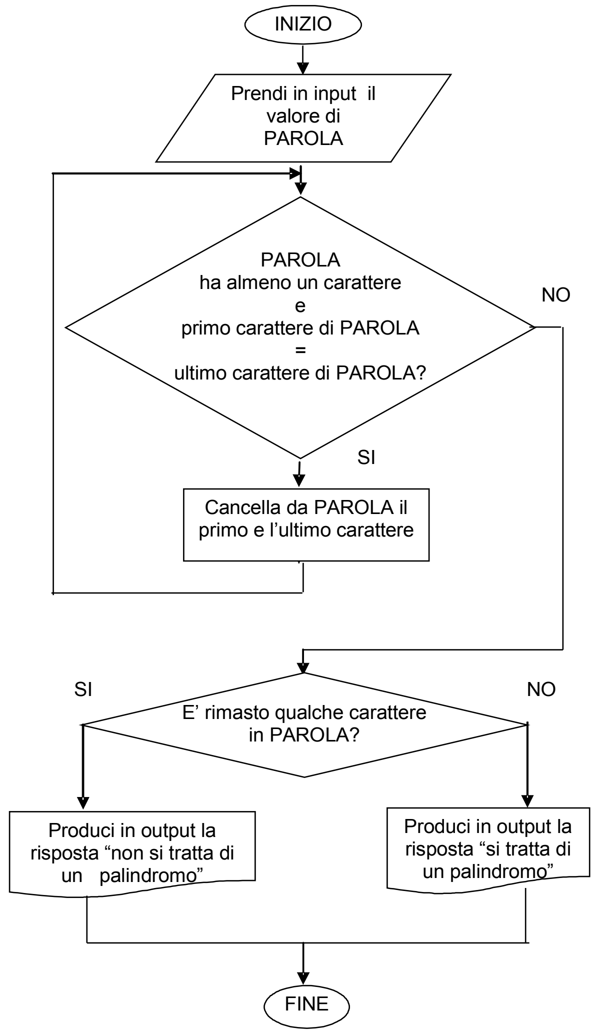


Diagramma di flusso per l'algoritmo euclideo per il MCD

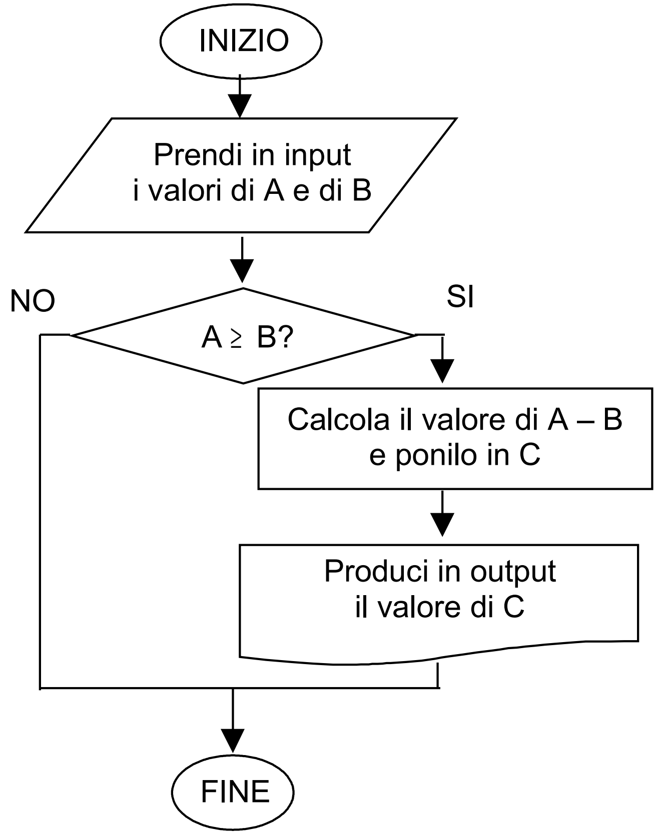


Algoritmo che verifica se una parola è palindroma:



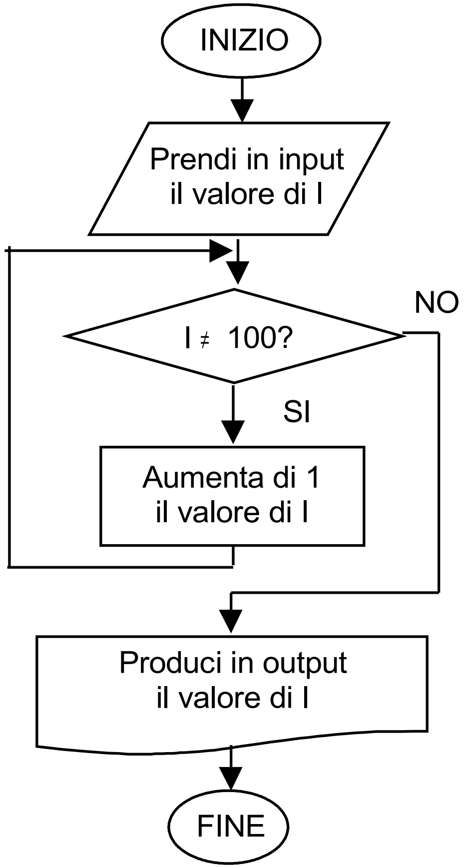
Alcuni algoritmi non sempre producono risultati

Algoritmo che calcola la differenza:

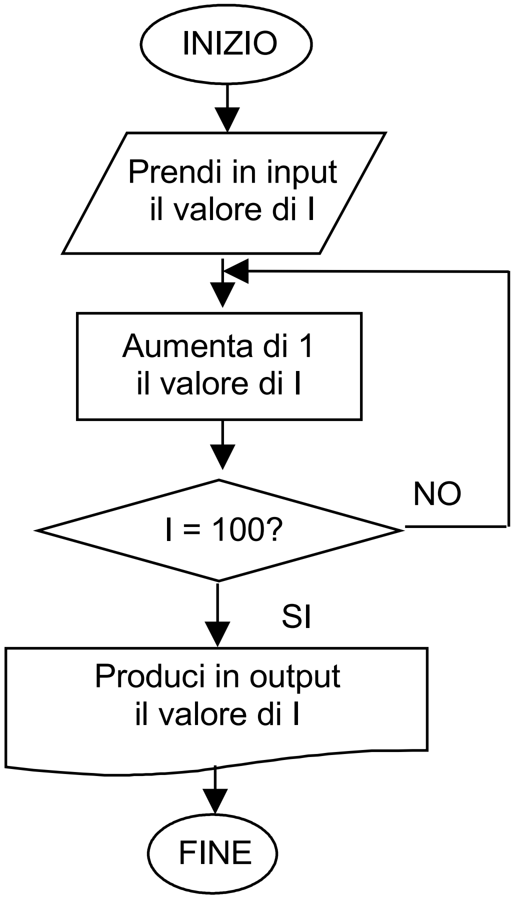


Algoritmi che non terminano (vanno in *loop*):

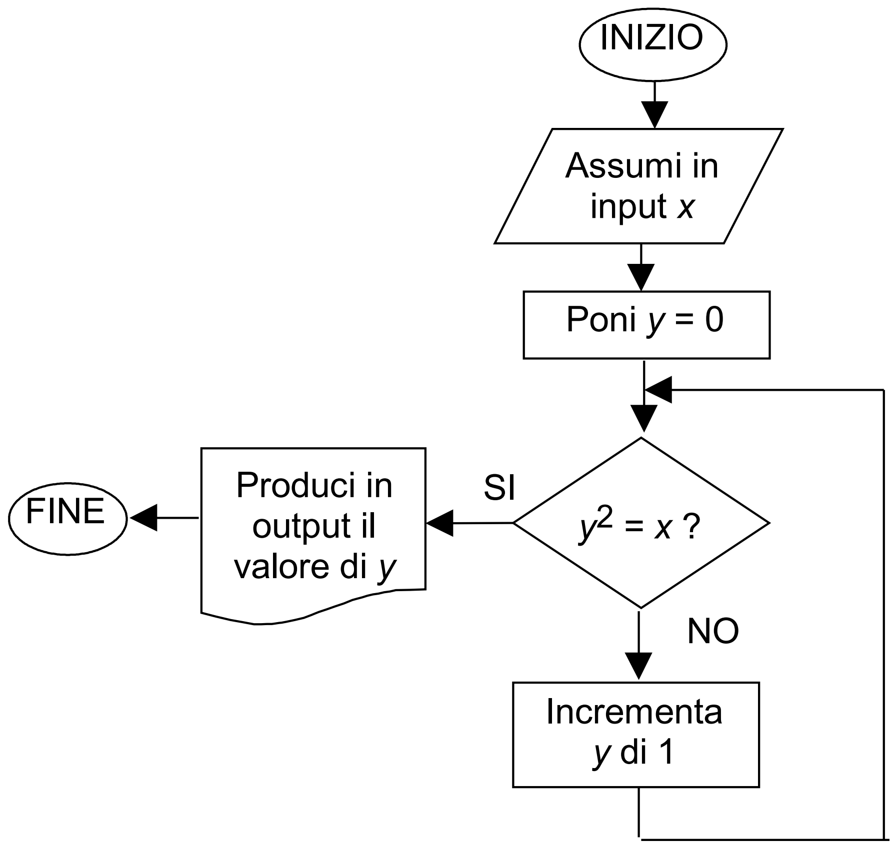
a)



b)

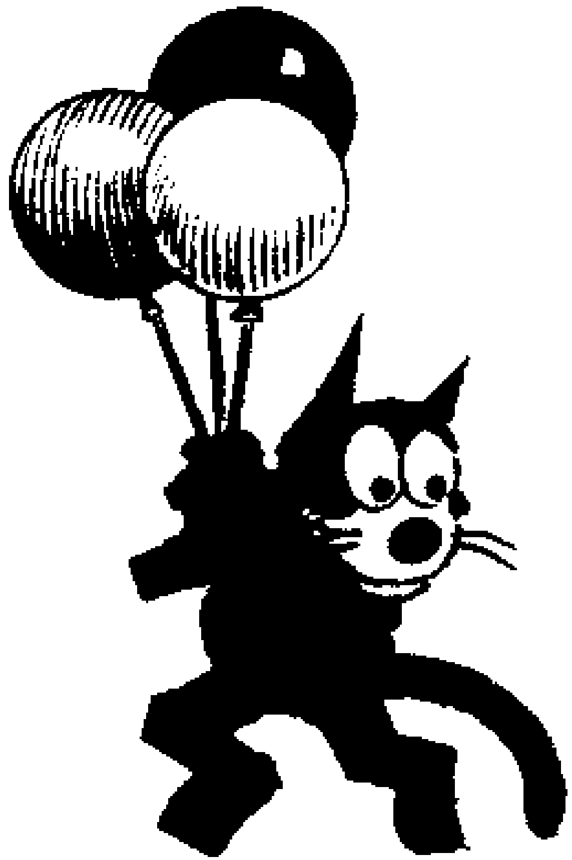


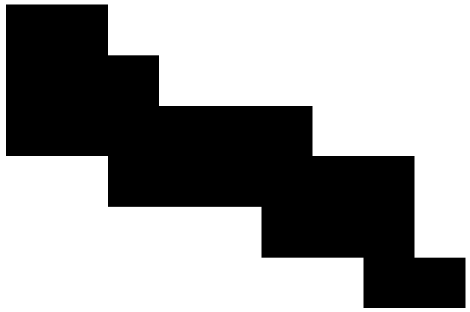
Algoritmo che calcola la radice quadrata (di numeri che sono quadrati perfetti):

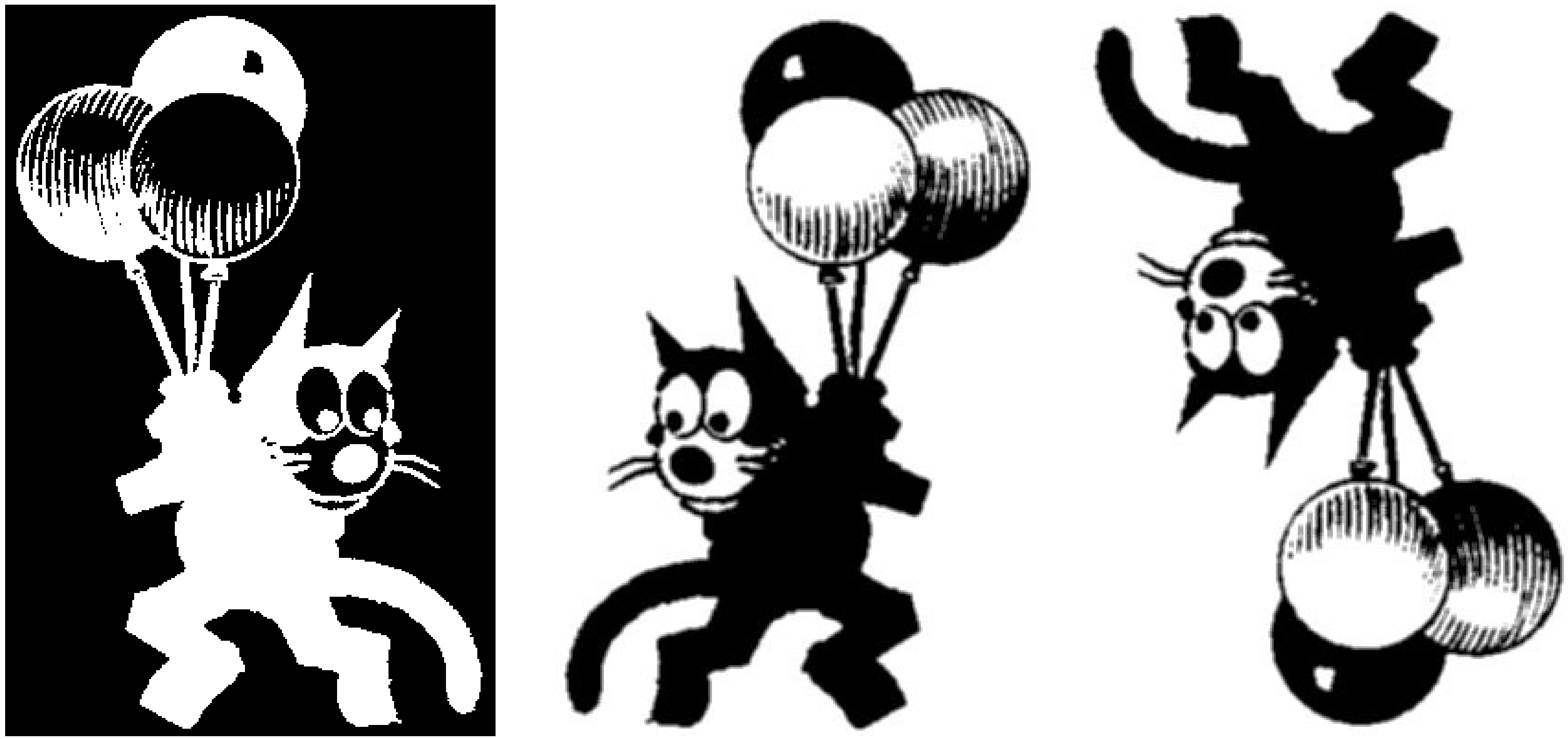


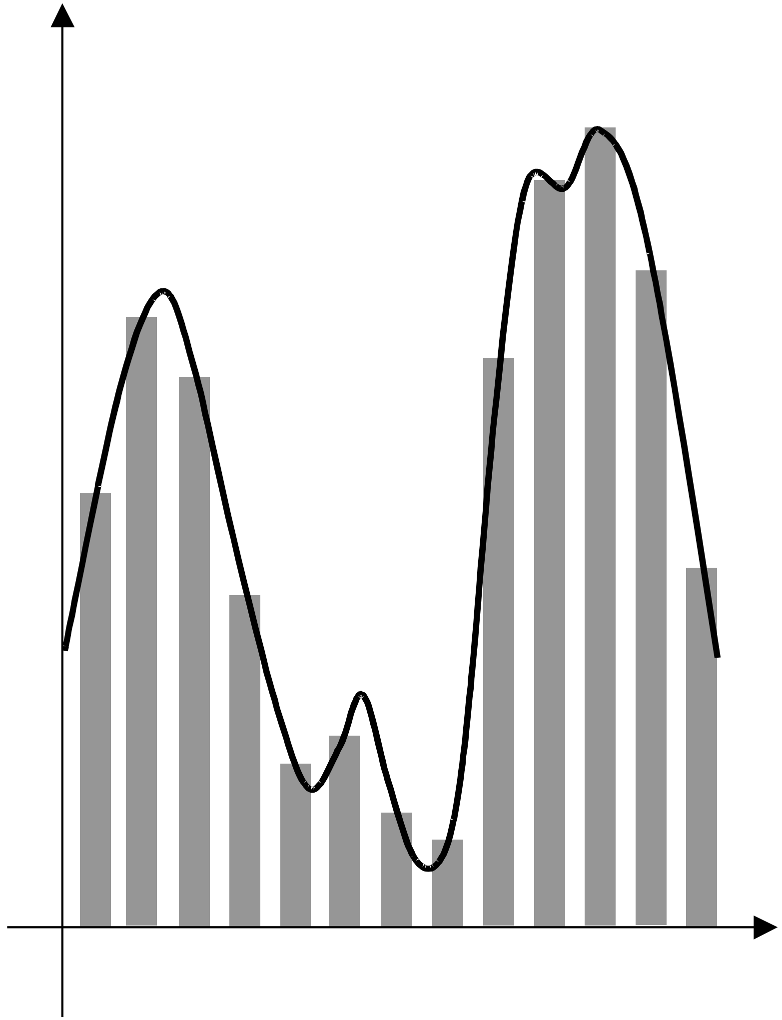
Numeri (naturali) e codifiche dei dati

I numeri naturali come un mezzo per rappresentare dati generici. Ad es. *immagini*

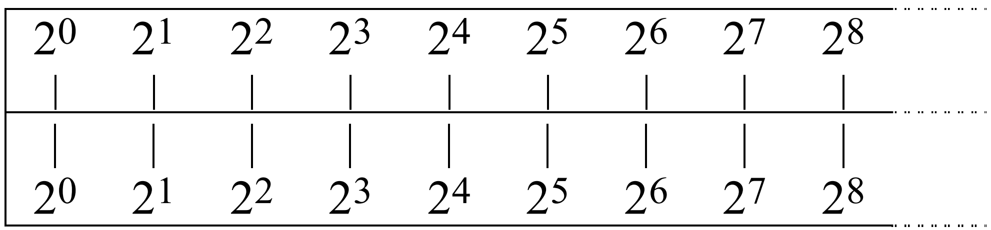


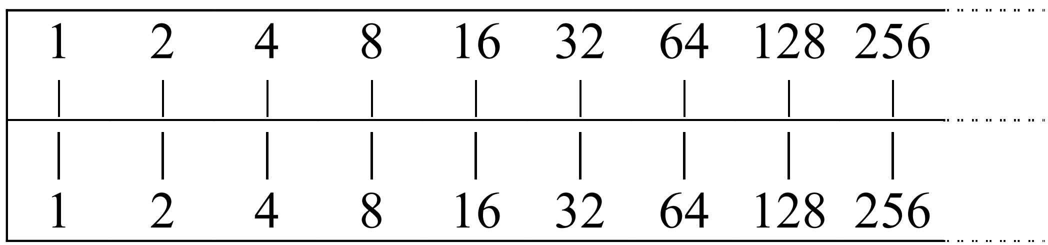


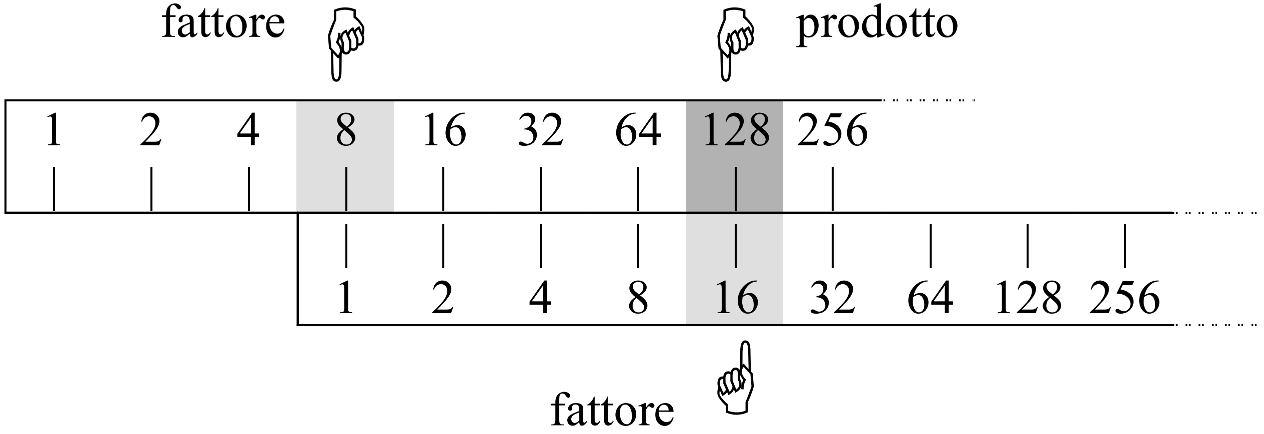




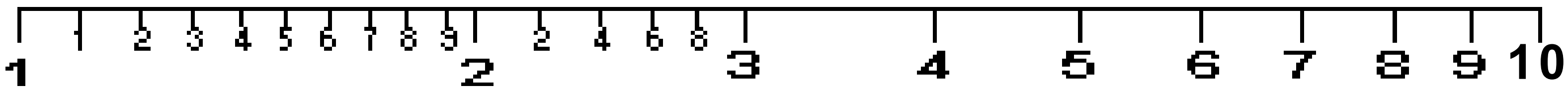
Analogico e digitale: il regolo calcolatore







Scala logaritmica:



Il concetto di funzione

Una ***funzione*** φ è una corrispondenza tra due insiemi D (***dominio***) e C (***codominio***):

- ad ogni ***argomento*** $x \in D$, φ associa come ***valore*** *uno ed un solo* elemento $y \in C$
  (in tal caso si scrive $\varphi(x) = y$)

- se φ ha dominio D e codominio C si dice che φ è di ***tipo*** $D \rightarrow C$

Funzioni definite mediante espressioni algebriche

Spesso in matematica una funzione φ viene individuata per mezzo di un'**espressione algebrica** $\varphi(x)$ contenente la lettera x

Ad esempio: $\varphi(x) = x^2 + 4$

Come funzione di tipo **R** $\rightarrow$ **R**:

$\varphi(3) = 3^2 + 4 = 13$
$\varphi(1{,}75) = 1{,}75^2 + 4 = 7{,}0625$
$\varphi(\sqrt{2}) = \left(\sqrt{2}\right)^2 + 4 = 6$
….

Come funzione di tipo **N** $\rightarrow$ **N:** …

Altri (semplicissimi) **esempi**:

$\varphi_1(x) = 2x$ $\varphi_2(x) = 4$ $\varphi_3(x) =$

Funzioni a più argomenti

Esempi di **funzioni a due argomenti**:

addizione: $\varphi(x_1, x_2) = x_1 + x_2$
moltiplicazione: $\varphi(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$
massimo comun divisore (MCD)
…

In generale, **funzione a *n* argomenti**: $\varphi(x_1, x_2,\dots, x_n) = y$

Sia φ una funzione a due argomenti che prende il suo primo argomento x_1 nell'insieme D_1, il suo secondo argomento x_2 nell'insieme D_2, e il cui valore appartiene all'insieme C.

Allora φ è una funzione di:

- **codominio** C
- **dominio** = insieme (*) delle coppie ordinate (x_1, x_2) tali che $x_1 \in D_1$ e $x_2 \in D_2$

(*) viene detto il <u>**prodotto cartesiano**</u> di D_1 e D_2, e indicato con $D_1 \times D_2$

Per cui φ è una funzione di **tipo** $D_1 \times D_2 \to C$

Il prodotto cartesiano $D \times D$ di un insieme D per sé stesso si indica anche con D^2

Per cui se una funzione φ è di tipo $D \times D \to C$, si scrive anche che φ è di tipo $D^2 \to C$

I connettivi logici come funzioni

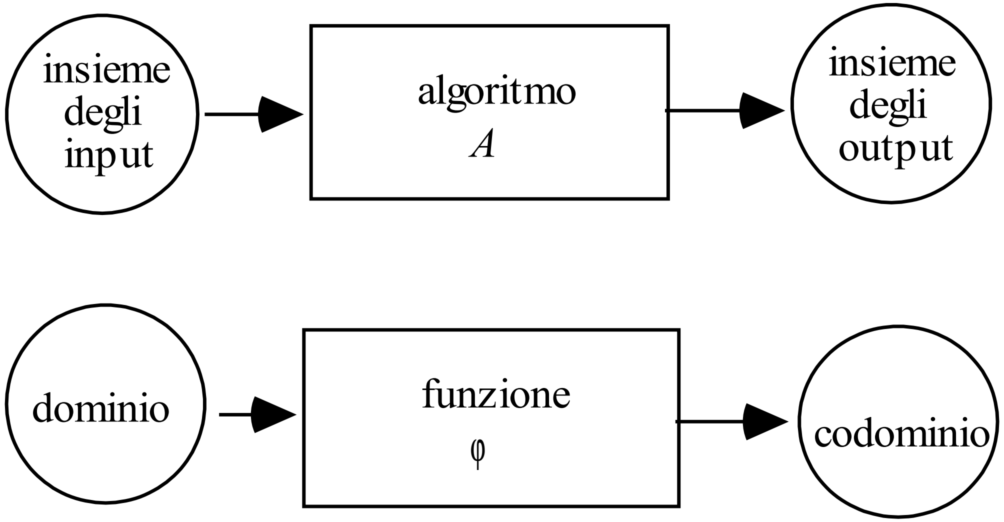
A	B	$A \wedge B$
V	**V**	**V**
V	**F**	**F**
F	**V**	**F**
F	**F**	**F**

A	$\neg A$
V	**F**
F	**V**

$$\wedge: \{\mathbf{V}, \mathbf{F}\}^2 \rightarrow \{\mathbf{V}, \mathbf{F}\}$$

$$\neg: \{\mathbf{V}, \mathbf{F}\} \rightarrow \{\mathbf{V}, \mathbf{F}\}$$

Funzioni e algoritmi



<u>Definizione</u> **-** Si dice che un algoritmo A ***calcola una funzione*** $\varphi: D \to C$ se e solo se, per ogni $x \in D$, $\varphi(x) = y$ se e soltanto se A con input x produce come output y.

Definizione **-** Si dice che una funzione è:

calcolabile (***computabile***) ***in modo algoritmico***
oppure ***calcolabile in modo effettivo***
oppure ***effettivamente calcolabile*** (***computabile***)
oppure ***calcolabile*** (***computabile***)

se e soltanto se

esiste un algoritmo che la calcola

Funzione ≠ Algoritmo !!!