Prefazione

La teoria della computabilità è un settore della ricerca logico-matematica che studia la nozione di calcolo algoritmico, ossia di calcolo eseguibile in modo meccanico. Essa è nata nel corso degli anni trenta del secolo scorso nel contesto delle ricerche sulla logica e sui fondamenti della matematica ad opera di studiosi quali Alan Turing, Kurt Gödel, Alonso Church, Stephen Kleene. Con lo sviluppo dei calcolatori digitali nel secondo dopoguerra la teoria della computabilità ha poi assunto il ruolo di disciplina dei fondamenti per l'informatica teorica. Attraverso l'informatica, la sua influenza culturale si è estesa ad ambiti quali l'intelligenza artificiale, le scienze cognitive, la linguistica. Di conseguenza, i risultati di teoria della computabilità si trovano al centro di alcuni dei crocevia più vitali e stimolanti della cultura filosofica e scientifica contemporanea, coinvolgono temi quali i teoremi di Gödel e i risultati di limitazione della logica matematica, i limiti dei calcolatori digitali e dei processi di calcolo, la natura degli stati mentali, il rapporto mente-corpo. Essi hanno pertanto una vasta portata culturale e sono rilevanti per molte differenti discipline.

Lo scopo di questo volume è rendere accessibili con un adeguato livello di approfondimento i principali risultati della teoria della computabilità ad un pubblico che non disponga necessariamente di preparazione e di strumenti matematici e logici. Se infatti il lettore non specialista può trovare in varie sedi qualche paragrafo dedicato a una breve introduzione informale ad alcuni concetti chiave della computabilità (ad esempio le nozioni di algoritmo e di macchina di Turing, la Tesi di Church, l'indecidibilità del problema dell'arresto), non appena egli senta l'esigenza di approfondire questi temi si trova a dover affrontare una letteratura manualistica specializzata che, oltre a non essere per lo più accessibile in lingua italiana, risulta tutt'altro che amichevole nei confronti dei non addetti ai lavori [1].

Destinatari del libro sono dunque tutti coloro che, pur non disponendo di (e non aspirando a) una formazione specialistica di tipo logico-matematico o di informatica teorica, hanno la necessità di una migliore comprensione dei temi e dei risultati della teoria della computabilità. Rientrano in questa categoria studenti e studiosi di filosofia della scienza, della mente e del linguaggio, di psicologia e, più in generale, di scienze cognitive, insegnanti delle scuole superiori (questi temi figurano infatti nei programmi di alcuni indirizzi della scuola secondaria), linguisti, economisti e così via.

A tal fine abbiamo progettato il testo in maniera da tenere presenti i seguenti requisiti:

– non presupporre come nota alcuna nozione tecnica;
– fornire numerosi esempi delle nozioni trattate;
– motivare sempre in modo intuitivo le definizioni e i risultati ottenuti;
– tralasciare i dettagli tecnici non strettamente necessari alla comprensione dei temi trattati.

Sono inoltre previsti esercizi in tutti quei capitoli per i quali essi possano risultare utili alla comprensione e all'assimilazione degli argomenti trattati. Per ogni esercizio viene riportata la risposta e/o una traccia della soluzione. In ciascun capitolo gli esercizi sono disposti secondo un ordine di difficoltà crescente.

Il libro è completato da riquadri che costituiscono complementi di vario genere al testo vero e proprio. Temi dei riquadri possono essere approfondimenti tecnici, cenni ad aspetti storici, collegamenti con nozioni collaterali, sintetiche esposizioni di nozioni tecniche utili per una migliore comprensione del testo.

Per quel che concerne la struttura, il libro può essere idealmente suddiviso in due parti: una prima parte generale (capitoli dal primo al sesto) e una serie di capitoli di approfondimento su settori di applicazione specifici (logica e filosofia della matematica, informatica, scienze cognitive, linguistica, complessità computazionale).

Illustriamo brevemente i contenuti dei capitoli.

Il CAP. 1 costituisce un'introduzione alla nozione intuitiva di *algoritmo*. Vengono presentati i *diagrammi di flusso* come una notazione adatta per esprimere algoritmi, viene posta in evidenza l'esistenza di algoritmi che in alcuni casi non terminano, e si spiega come algoritmi

1. Alcuni manuali specialistici di teoria della computabilità sono indicati nei suggerimenti bibliografici riportati alla fine del volume.

che elaborano tipi di dati diversi possano essere ricondotti ad algoritmi che eseguono calcoli di tipo aritmetico, che elaborano cioè numeri naturali.

Il CAP. 2 mette in relazione la nozione di algoritmo con la nozione di *funzione*. Dopo un breve richiamo del concetto matematico di funzione, viene introdotta la nozione di *funzione calcolabile* per mezzo di un algoritmo e le nozioni ad essa correlate di *insieme* e di *predicato decidibili*. Viene anche introdotto il concetto di *funzione parziale*, un'estensione dell'usuale concetto di funzione che consente di tenere conto del fatto che un algoritmo che calcola una funzione può, in alcuni casi, dar luogo a un calcolo che non termina.

Il CAP. 3 fornisce alcune *nozioni insiemistiche* rilevanti per la nostra trattazione, come ad esempio la distinzione tra *insiemi numerabili* e *insiemi più che numerabili*. Tale distinzione viene utilizzata per mostrare che esistono *funzioni che non sono computabili*. Dopo di che si spiega perché in teoria della computabilità si prendono in considerazione funzioni parziali anziché totali. Viene infine introdotta la nozione di *insieme effettivamente enumerabile*.

Nel CAP. 4 si passa dalla nozione intuitiva di algoritmo alla sua caratterizzazione rigorosa. In particolare, viene presentata l'analisi del concetto di algoritmo proposta da Alan Turing, formulata nei termini di una classe di dispositivi di calcolo astratti oggi noti come *macchine di Turing* (d'ora in poi MT). Vengono introdotti vari esempi di MT *che calcolano funzioni aritmetiche*.

Nel CAP. 5 viene presentata un'analisi della nozione di algoritmo alternativa (anche se equivalente) a quella nei termini di MT. La *definizione induttiva di funzioni* consente di definire una classe di funzioni calcolabili in modo algoritmico, la *classe delle funzioni ricorsive primitive*. Esistono funzioni calcolabili con un algoritmo che non sono ricorsive primitive; tuttavia la classe delle funzioni ricorsive primitive può essere estesa alla classe delle *funzioni ricorsive generali*. Si mostra che ogni funzione ricorsiva generale è calcolabile con una MT, e viceversa. La nozione di ricorsività viene estesa a insiemi e predicati attraverso le nozioni di *insieme* e di *predicato ricorsivi* e *ricorsivamente enumerabili*.

Il CAP. 6 espone alcuni dei risultati più importanti della teoria della computabilità. Numerosi risultati di equivalenza tra caratterizzazioni diverse della nozione di funzione calcolabile in modo effettivo hanno fatto ritenere che la nozione di funzione computabile mediante un algoritmo fosse in larga parte indipendente dalla formulazione impiegata. In altri termini, si è ipotizzato che tutto ciò che è computabile con un algoritmo sia computabile da una MT. Questo, nella sostanza, è l'enunciato della cosiddetta *Tesi di Church*. La Tesi di Church ha varie importanti conseguenze, in particolare l'esistenza di una MT *universale*, ossia una MT programmabile che è in grado di simulare qualsiasi MT, e l'esistenza di *problemi indecidibili*, ossia problemi la cui risposta non può sempre essere ottenuta per mezzo di un algoritmo, come, ad esempio, il cosiddetto *problema della fermata* per le macchine di Turing.

Come si è detto, i capitoli dal settimo al dodicesimo sono dedicati ad applicazione della teoria della computabilità e all'approfondimento di temi particolari.

Il CAP. 7 è dedicato al settore di applicazione più tradizionale della teoria della computabilità, ossia la *filosofia della matematica* e la *logica*. Si esamina come la teoria della computabilità sia nata nel contesto dei problemi relativi ai fondamenti della matematica, e si mostra come i teoremi logici di limitazione quali i teoremi di Church e di Gödel si colleghino ai risultati di indecidibilità presentati nel CAP. 6.

Il CAP. 8 tratta dei rapporti tra teoria della computabilità e *informatica*. Con l'avvento dei calcolatori digitali, la teoria della computabilità ha assunto il ruolo di teoria dei fondamenti per l'informatica teorica. Qui si mostra come alcuni aspetti del funzionamento della MT universale siano comuni ai calcolatori a programma memorizzato basati sulla cosiddetta *architettura di von Neumann*. Dopo di che, viene mostrato come, sia con i *linguaggi di programmazione di basso livello*, sia con i *linguaggi di alto livello*, si possano esprimere tutte le funzioni che sono calcolabili con un algoritmo secondo la Tesi di Church.

Il CAP. 9 esamina alcuni sviluppi tecnici della teoria della computabilità relativi alla *teoria dei linguaggi formali*, che risultano di grande rilevanza per la *linguistica*. Viene introdotta la nozione di *grammatica formale*, e viene esposta la gerarchia di diverse classi di grammatiche proposta da Noam Chomsky, con le relazioni che sussistono tra tali classi e diversi tipi di macchine calcolatrici.

La teoria della computabilità ha fornito la cornice teorica alla base degli sviluppi delle *scienze cognitive*. Questo è l'argomento del CAP. 10. Viene esaminato il peso avuto dalla teoria della computabilità nello sviluppo del paradigma cognitivista in opposizione al comportamentismo e nella caratterizzazione degli stati mentali nell'ambito delle scienze cognitive. Inoltre si mostra come modelli cognitivi basati su paradigmi di calcolo alternativi a quello di Turing/von Neumann (come ad esempio le reti neurali) non contraddicano il quadro generale delineato dalla teoria della computabilità.

Il CAP. 11 tratta gli aspetti legati alla *complessità computazionale*, un tema di grande rilevanza per l'informatica e per tutte le discipline in qualche modo connesse alla computabilità. Nel CAP. 6 si è visto che esistono problemi che non possono essere risolti mediante algoritmi. Tuttavia, anche tra i problemi che in linea di principio possono essere risolti con un algoritmo, ve ne sono alcuni per i quali tale possibilità è puramente teorica, in quanto essi non sono trattabili computazionalmente, poiché in alcuni casi richiedono risorse di calcolo (tempo e spazio di memoria) che risultano proibitive. In questo capitolo presentiamo alcuni dei risultati più rilevanti della teoria della complessità computazionale, dai quali segue che alcuni problemi di calcolo sono intrinsecamente difficili, nel senso che richiedono risorse di calcolo troppo impegnative.

L'ultimo capitolo, il 12, espone due proposte non "ortodosse", recentemente avanzate per affrontare i problemi relativi alla complessità computazionale visti nel capitolo precedente. Si tratta del cosiddetto *DNA computing*, un modello di calcolo che si avvale delle proprietà delle molecole che costituiscono il materiale genetico degli esseri viventi, e della *computazione quantistica*, un paradigma di calcolo che sfrutta gli effetti quantistici che si verificano a livello di struttura microscopica della materia.

Il testo è stato redatto in modo da essere utilizzabile anche come *supporto per un corso universitario* di introduzione alla calcolabilità. La parte generale (CAPP. 1-6) prevede **due possibili percorsi di lettura**, uno breve, adatto ad un corso di un modulo, ed uno più approfondito, adatto ad un corso suddiviso in due moduli. I capitoli della seconda parte (CAPP. 7-11) sono largamente indipendenti tra loro, e possono essere utilizzati per approfondimenti specifici.

Il percorso breve è costituito da questa sequenza di capitoli, paragrafi e sottoparagrafi:

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3.1\text{-}3.3 \rightarrow 4 \rightarrow 5.1 \rightarrow 6.1\text{-}6.2.1$$

L'idea che fa da sfondo a tale percorso è quella di limitare l'attenzione alla caratterizzazione rigorosa degli algoritmi costituita dalle macchine di Turing e di pervenire, entrando nel minor numero possibile di dettagli tecnici, ad almeno uno dei risultati di indecidibilità, nel caso specifico l'indecidibilità del problema della fermata delle MT. L'inserimento nel percorso del PAR. 5.1 è motivato dall'opportunità di sapere che vi sono altri modi per caratterizzare le funzioni computabili, in modo che risulti più chiaro il PAR. 6.1 sulla Tesi di Church.

Per quanto riguarda il percorso più lungo, segnaliamo che il discorso complessivo può essere ridotto fermando la trattazione al PAR.

6.2.3 ed omettendo del tutto i PARR. 3.4 e 5.5 (che sono tecnicamente impegnativi). In tal modo si può eliminare la trattazione specifica degli insiemi ricorsivamente enumerabili e dei problemi semidecidibili, che costituiscono un ampliamento importante, ma non necessario, delle considerazioni relative alla computabilità. In ogni caso, come viene specificato di volta in volta nel testo, alcuni paragrafi costituiscono degli approfondimenti o forniscono esempi ulteriori che possono essere omessi senza compromettere la lettura (ad esempio i PARR. 4.4 sulla MT che calcola la moltiplicazione e 5.2.4 su alcuni esempi di funzioni ricorsive primitive).