CAPITOLO PRIMO – DEFINIZIONI DELLA PROBABILITÀ

§1. Definizione classica di probabilità

Se si riflette un attimo, si vede che non sono poi molte le certezze di cui disponiamo. È certo che, prima o poi, dobbiamo morire; che un sasso lanciato per aria ricadrà; che domani la terra avrà compiuto un altro giro intorno al suo asse e il sole "sorgerà" di nuovo. Sono invece numerose le circostanze in cui, pur sapendo che un evento non è del tutto certo o del tutto impossibile, ci comportiamo come se lo fosse. Vi sono infine molti fenomeni in cui è proprio l'incertezza l'elemento essenziale: i giochi d'azzardo nei quali l'esito dipende unicamente dal caso e in nessun modo dall'abilità dei giocatori; le scommesse; i sorteggi; ma anche il moto di una singola molecola di gas in un recipiente chiuso, l'ereditarietà, i contratti di assicurazione contro i danni o sulla vita. In situazioni del genere, la matematica si propone di sostituire alle vaghe descrizioni qualitative "poco probabile", "molto probabile", "quasi certo", "quasi impossibile" e simili, una più precisa ***misura quantitativa*** della probabilità dei vari eventi.

Iniziamo con l'esaminare la situazione più semplice: un fenomeno si può realizzare con diverse modalità tutte ugualmente possibili, ossia fra di esse vi è perfetta simmetria, non vi è alcun motivo per ritenere che si debba verificare l'una piuttosto che l'altra.

***Esempio* 1**. Abbiamo un mazzo da quaranta carte, lo mescoliamo ed estraiamo una carta. Vi sono quaranta casi possibili, o anche quaranta *eventi elementari*, tanti quante le carte nel mazzo e non vi è motivo di ritenere che uno di essi (ad esempio l'uscita del re di picche) debba verificarsi più o meno di un altro (ad esempio l'uscita del quattro di fiori). Vi sono poi numerosi *eventi composti*, formati dall'unione di più eventi elementari, quali "esce un sette", "esce una figura", "esce una carta di cuori", "esce una figura di cuori".

***Esempio* 2**. Lanciamo un dado non truccato: ha forma perfettamente cubica per quanto può averla un oggetto reale, ed è di materiale omogeneo. Vi sono sei eventi elementari: "esce l'uno", "esce il due",..., "esce il sei", e ognuno di essi ha la stessa possibilità di verificarsi di ciascuno degli altri cinque. Vi sono poi vari eventi composti, quali "esce un numero maggiore di due", "esce un numero primo", "esce il due o il quattro", "non esce il sei".

***Esempio* 3**. Vi sono due lotterie, entrambe con un unico premio. Mi regalano 18 biglietti della prima, dove il totale dei biglietti è 42, e 33 biglietti della seconda, dove il totale dei biglietti è 77. In quale delle due ripongo maggiori speranze di vincita?
La risposta non dipende soltanto dal numero di biglietti che mi sono stati regalati, né soltanto dal numero complessivo dei biglietti. Dipende invece dal loro rapporto, che è $\frac{18}{42} = \frac{3}{7}$ per la prima lotteria, e $\frac{33}{77} = \frac{3}{7}$ per la seconda. Per ciascuna delle due lotterie, ogni sette biglietti emessi, tre sono in mio possesso. Giudicherò pertanto ugualmente probabile vincere nell'una oppure nell'altra.

Appare quindi naturale la seguente definizione di probabilità, detta classica, essendo stata introdotta per prima nel XVII secolo:

Definizione classica di probabilità. *Se tutti i casi possibili sono ugualmente possibili, la* **probabilità di un evento** E, *che indichiamo con* $p(E)$, *è uguale al rapporto fra il numero* f *dei casi favorevoli e il numero* n *dei casi possibili*. In formula: $\boxed{p(E) = \frac{f}{n}}$

***Esempio* 4**. Estraiamo una carta da un mazzo da quaranta.
Calcoliamo la probabilità dei seguenti eventi:

A = "esce un sette" $\qquad$ B = "esce una figura"
C = "esce una carta di cuori" $\qquad$ D = "esce una figura di cuori".

Si ha:

$$p(A) = \frac{4}{40} = \frac{1}{10} = 0{,}1 \qquad p(B) = \frac{12}{40} = \frac{3}{10} = 0{,}3$$
$$p(C) = \frac{10}{40} = \frac{1}{4} = 0{,}25 \qquad p(D) = \frac{3}{40} = 0{,}075$$

***Esempio* 5**. Lanciamo un dado non truccato.
Calcoliamo le probabilità dei seguenti eventi:

A = “esce un numero maggiore di due” B = “esce un numero primo”
C = “esce il due o il quattro” D = “non esce il sei”

Si ha: $p(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} = 0,\bar{6}$ $p(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0,5$ (per definizione 1 *non* è primo)

$p(C) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 0,\bar{3}$ $p(D) = \frac{5}{6} = 0,8\bar{3}$

***Esempio* 6**. Si lancia due volte una moneta. Qual è la probabilità che escano due teste?
I casi possibili sono quattro:

- in entrambi i lanci esce testa: **TT**
- esce testa al primo lancio e croce al secondo: **TC**
- esce croce al primo lancio e testa al secondo: **CT**
- in entrambi i lanci esce croce: **CC**

e sono tutti ugualmente possibili, non vi è motivo per ritenere che uno di essi possa verificarsi più di un altro. La probabilità che escano due teste è quindi $\frac{1}{4}$ = 0,25.
Un grande matematico francese del XVIII secolo, Jean Baptiste Le Rond D’Alembert, si ostinava invece nel sostenere la seguente soluzione. I casi possibili sono tre:

- escono due teste
- esce una testa
- escono zero teste

e pertanto la probabilità che escano due teste è $\frac{1}{3}$, dato che vi sono un caso favorevole e tre casi possibili.
Ora, è perfettamente lecito descrivere lo spazio degli eventi come composto da questi tre eventi elementari. Non è però vero che essi siano “ugualmente possibili”. Mentre “escono due teste” può verificarsi con una sola modalità, **TT**, “esce una testa” può verificarsi con due modalità distinte, **TC** e **CT**, ognuna delle quali ha la stessa possibilità di verificarsi di **TT**. Non è allora lecito applicare la definizione classica di probabilità.

***Esempio* 7**. Estraggo successivamente due carte da un mazzo da quaranta, senza rimettere la prima estratta nel mazzo. Qual è la probabilità che siano dello stesso seme, cioè entrambe di cuori, o entrambe di denari, o entrambe di fiori, o entrambe di picche?
Sono possibili diverse soluzioni. Una semplice ed elegante è la seguente.
Poiché per tutti i semi il numero delle carte è lo stesso, il fatto che la prima carta estratta sia di un certo seme, ad esempio di fiori, non aumenta né diminuisce la probabilità cercata. È quindi sufficiente calcolare la probabilità che la seconda carta sia dello stesso seme della prima. I casi possibili sono dati dalle 39 carte rimaste, i casi favorevoli dalle 9 carte di quel seme rimaste nel mazzo. La probabilità cercata è, quindi: $\frac{9}{39} = \frac{3}{13}$.

Come emerge dagli esempi, la definizione classica attribuisce ad un evento E una probabilità espressa da un numero reale non negativo e non maggiore di 1: $\boxed{0 \le p(E) \le 1}$
In particolare:

- se nessun caso possibile è favorevole al verificarsi dell’evento E (f = 0), E è detto **impossibile** e la sua probabilità è 0.

Ad esempio, nel caso di un’estrazione da un mazzo da quaranta carte, sono impossibili gli eventi “esce un jolly”, “esce il nove di cuori”; nel caso del lancio di un dado sono impossibili gli eventi “esce un numero maggiore di otto”, “esce un numero multiplo di sette”.

- se tutti i casi possibili sono favorevoli al verificarsi dell’evento E ($f = n$), E è detto **certo** e la sua probabilità è 1.

Ad esempio, nel caso di un’estrazione da un mazzo da quaranta carte, è certo l’evento “esce una carta di cuori, o di denari, o di fiori, o di picche”; nel caso del lancio di un dado sono certi gli eventi “esce un numero minore di sette”, “esce un numero divisore di 60”.

§2 La definizione classica di probabilità in situazioni più complesse

***Esempio* 1**. Si lancia tre volte una moneta. Qual è la probabilità che escano due teste e una croce, indipendentemente dall'ordine?

I casi possibili si determinano facilmente:

escono tre teste: **TTT**	escono due teste: **TTC**, **TCT**, **CTT**
esce una testa: **TCC**, **CTC**, **CCT**	escono zero teste: **CCC**

Pertanto, i casi favorevoli sono tre, i casi possibili sono otto e la probabilità è: $\frac{3}{8} = 0{,}375$.

***Esempio* 2**. In un'urna vi sono cinque palline, tre nere e due bianche. Estraendone due, senza rimettere la prima estratta nell'urna, qual è la probabilità di ottenere:

a) due palline nere
b) due palline di colore diverso?

Indichiamo con n_1, n_2, n_3 le palline nere e con b_1, b_2 quelle bianche. I casi possibili sono dati da tutte le possibili coppie di palline estratte:

n_1, n_2	n_1, n_3	n_1,b_1	n_1, b_2
n_2, n_1	n_2, n_3	n_2, b_1	n_2, b_2
n_3, n_1	n_3, n_2	n_3, b_1	n_3, b_2
b_1, n_1	b_1, n_2	b_1, n_3	b_1, b_2
b_2, n_1	b_2, n_2	b_2, n_3	b_2, b_1

Più rapidamente, con un procedimento applicabile facilmente anche ad un numero elevato di palline, si può ragionare così: ad ognuna delle cinque palline associamo una qualsiasi delle quattro rimanenti. I casi possibili sono allora $5 \cdot 4 = 20$.

a) I casi favorevoli all'evento "escono due palline nere" sono sei:

n_1, n_2 $\quad n_1, n_3$ $\quad n_2, n_1$ $\quad n_2, n_3$ $\quad n_3, n_1$ $\quad n_3, n_2$

Più rapidamente: ad ognuna delle tre palline nere si può associare una qualsiasi delle due nere rimanenti, per cui le coppie di palline nere sono $3 \cdot 2 = 6$.

Pertanto, la probabilità di estrarre due palline nere è: $\frac{6}{20} = \frac{3}{10} = 0{,}3$.

b) Le coppie di palline di colore diverso sono dodici:

n_1,b_1	n_1, b_2	n_2, b_1	n_2, b_2	n_3, b_1	n_3, b_2
b_1, n_1	b_1, n_2	b_1, n_3	b_2, n_1	b_2, n_2	b_2, n_3

Si può anche ragionare nel modo seguente: le coppie di palline con la prima estratta nera e la seconda bianca si ottengono associando a ciascuna delle tre palline nere una qualsiasi delle due bianche e sono $3 \cdot 2$; le coppie di palline con la prima estratta bianca e la seconda nera si ottengono associando a ciascuna delle due palline bianche una qualsiasi delle tre nere e sono $2 \cdot 3$; complessivamente le coppie di palline di colore diverso sono $6 + 6 = 12$. Quindi, la probabilità di estrarre due palline di colore diverso è $\frac{12}{20} = \frac{3}{5} = 0{,}6$.

Nel computo si è tenuto conto dell'ordine, per cui ad esempio n_2, b_1 e b_1, n_2 sono stati considerati due casi distinti. Poiché, ai fini del verificarsi degli eventi "escono due palline nere" e "escono due palline di colore diverso" l'ordine non ha importanza, è altrettanto corretto non tenere conto dell'ordine e identificare in un unico caso, a due a due, le coppie formate dalle stesse palline. Con tale impostazione, i casi possibili sono $\frac{5 \cdot 4}{2}$, i casi favorevoli all'evento "escono due palline nere" sono $\frac{3 \cdot 2}{2}$, i casi favorevoli all'evento "escono due palline di colore diverso" sono $3 \cdot 2$. Tanto il numero dei casi favorevoli quanto il numero dei casi possibili risultano dimezzati, e il loro rapporto, e quindi la probabilità, resta inalterato.

Si noti però che questo secondo modo di procedere non è più applicabile se la prima pallina estratta viene rimessa nell'urna. Infatti, in tale ipotesi, oltre a coppie di eventi come n_2, b_1 e b_1, n_2, vi sono cinque nuovi eventi possibili: n_1, n_1 n_2, n_2 n_3, n_3 b_1, b_1 b_2, b_2 che non possono essere raggruppati a due a due.
Se la prima pallina estratta viene rimessa nell'urna la probabilità dell'evento:

a) "escono due palline nere" diviene $\frac{9}{25} = 0{,}36$

b) "escono due palline di colore diverso" risulta $\frac{12}{25} = 0{,}48$.

§3 Frequenza relativa e probabilità

Ho appena ricevuto in resto una moneta, e non ho alcun motivo di ritenere che sia truccata: le lievi differenze fra le incisioni delle due facce non sembrano sufficienti ad alterarne la simmetria in modo significativo. Decido allora che testa (**T**) o croce (**C**) hanno uguale possibilità di verificarsi e che per entrambi gli eventi la probabilità è 1/2. Se la lancio una volta, non posso prevedere cosa succederà. Se però effettuo dieci lanci, mi aspetto un numero di teste non troppo lontano da quello delle croci: diciamo cinque e cinque, o quattro e sei, o anche sette e tre. Mi stupirei un po' se uscissero una sola testa e nove croci. In tal caso si sarebbe verificato un evento raro, a bassa probabilità. Calcoliamola.
Lanciando una volta una moneta i casi possibili sono due: **T** e **C**.
Lanciandola due volte, sono quattro: **TT**, **TC**, **CT**, **CC**.
Lanciandola tre volte sono otto. Per essere sicuro di scriverli tutti una e una sola volta, ricopio i quattro precedenti, aggiungendo una volta **T** e una volta **C**: **TTT**, **TTC**, **TCT**, **TCC**, **CTT**, **CTC**, **CCT**, **CCC**.
Appare chiaro che, lanciandola dieci volte, i casi possibili, cioè tutte le diverse sequenze di dieci fra **T** e **C**, risultano $2^{10} = 1024$. Fra esse, quelle che contengono una sola **T** sono dieci: l'unica testa può essere al primo, al secondo,..., al decimo posto. L'evento "esce una sola testa in dieci lanci" ha quindi, a priori, probabilità $\frac{10}{1024} \cong \frac{10}{1000} = 0{,}01$. Si è allora verificato un evento con probabilità appena inferiore all'1%.

Supponiamo ora di effettuare 1000 lanci. L'intuizione mi dice che il numero di teste non sarà troppo lontano da 500: diciamo, ad esempio, che sarà compreso fra 450 e 550. In teoria potrebbe succedere, anche con una moneta buona, di ottenere zero teste, o mille teste. Solo in teoria però: la probabilità di ciascuno dei due eventi è $1/2^{1000}$, che è inferiore a 10^{-300}. Sarebbe molto più facile vincere, con un solo biglietto, l'unico premio di una lotteria in cui il numero di biglietti supera quello degli atomi dell'universo! Si rifletta attentamente su questo punto. La sequenza di mille teste:

TTTTTTTT..........................T

non è né più né meno probabile di qualsiasi altra sequenza del tipo:

TCTTCCCTCTT.................C

in cui mille fra **T** e **C** compaiono distribuite in un ordine qualsiasi.
Tuttavia, la sequenza di mille **T** si può verificare in un modo solo. Una sequenza con, ad esempio, trecento **T** e settecento **C** si può realizzare in un numero smisurato di modi diversi, che risulta dell'ordine di 10^{263}. Ciò significa che l'evento "escono trecento teste e settecento croci" ha probabilità di verificarsi che è circa 10^{263} volte quello dell'evento "escono mille teste", o "escono mille croci". A sua volta, questa probabilità è oltre 10^{35} volte più piccola di quella dell'evento "escono cinquecento teste e cinquecento croci" (il numero di sequenze diverse con cinquecento **T** e cinquecento **C** è dell'ordine di 10^{299}).
In sintesi, il numero di casi favorevoli all'evento "esce un numero di teste compreso fra 450 e 550" è così prossimo al numero dei casi possibili che la probabilità che esso si realizzi è quasi uguale a quella dell'evento certo.

Supponiamo di ripetere n volte, sempre nelle stesse condizioni, un certo esperimento, ad esempio l'estrazione di una carta da un mazzo da quaranta (rimettendo ogni volta nel mazzo la carta estratta e rimescolando), o di una pallina da un'urna (rimettendo ogni volta nell'urna la pallina estratta e rimescolando), o il lancio di una moneta, o di un dado.

Definizione. Se, in una sequenza di n prove, un evento E si verifica s volte, si dice che il rapporto $\frac{s}{n}$ è la **frequenza relativa** di E rispetto alla data sequenza di prove.

Ad esempio, se estraendo 50 volte una carta da un mazzo da quaranta, otteniamo 14 volte una carta di fiori, diciamo che la frequenza relativa dell'evento "si estrae una carta di fiori" è $\frac{14}{50}$ = 0,28. Se, lanciando 100 volte un dado, otteniamo 19 volte un sei, allora la frequenza relativa dell'evento "esce un sei" è $\frac{19}{100}$ = 0,19.

Quale relazione esiste fra la frequenza relativa di un evento e la sua probabilità?

La risposta è:
effettuando numerose prove, eseguite nelle stesse condizioni, la **frequenza relativa** *di un evento è assai prossima alla sua* **probabilità**; *l'approssimazione è tanto maggiore quanto più numerose sono le prove effettuate*.

Questo enunciato non è un teorema matematico, ma una legge sperimentale, detta **legge empirica del caso**, che si può sottoporre a verifica al pari di tutte le altre leggi fisiche. Sono divenute celebri le verifiche sperimentali eseguite dal matematico francese del settecento George Louis Leclerc, conte di Buffon e dal matematico inglese Karl Pearson (1857-1936) per confrontare la frequenza relativa dell'evento "esce testa" con la probabilità teorica 1/2 = 0,5. I risultati sono riportati nella seguente tabella:

	numero lanci	numero di teste	frequenza relativa
Buffon	4.040	2.048	0,5069
Pearsons	12.000	6.019	0,5016
Pearsons	24.000	12.012	0,5005

Come è evidente, la frequenza relativa è assai prossima alla probabilità, e l'approssimazione diviene migliore al crescere del numero delle prove.

§4 La definizione frequentista della probabilità

Ampliamo allora il nostro esame a tutte quelle situazioni in cui:

- è possibile effettuare esperimenti, sempre nelle stesse condizioni, e dove, almeno in linea teorica, il numero delle prove effettuate può essere reso grande a piacere;
- si dispone di numerosi dati statistici relativi ad un certo evento. Ad esempio, si conosce il numero dei nati in una nazione in un certo intervallo di tempo, e quanti di essi sono maschi, e si vuole stimare la probabilità che un neonato sia maschio. Anche in questo caso, sia pure impropriamente, parleremo di prove.

In base a quanto esposto nel paragrafo precedente, appare naturale assumere la frequenza relativa come stima della probabilità. Il valore sarà tanto più affidabile quanto più numerose saranno le prove effettuate. Più precisamente, si dà la seguente:

Definizione frequentista della probabilità. *La* **probabilità** *di un evento è il limite a cui tende la frequenza relativa, al tendere all'infinito del numero delle prove effettuate*.

***Esempio* 1**. Se lanciamo una puntina da disegno, essa può cadere con la punta rivolta verso l'alto o verso il basso. Quali sono le probabilità dei due eventi?

È chiaro che sarebbe errato usare la definizione classica di probabilità: a differenza della moneta, la puntina non è simmetrica, e uno dei due eventi può essere più probabile dell'altro.
La soluzione è semplice: lanciamo la puntina tante volte, e assumiamo la frequenza relativa come stima della probabilità. Tale stima sarà tanto più attendibile quanto maggiore sarà stato il numero delle prove effettuate.
Eseguendo un'altra serie di lanci troveremo, quasi sicuramente, un valore diverso della frequenza relativa, e quindi una stima diversa della probabilità. Però, se ciascuna delle due serie è composta da un numero abbastanza elevato di prove, le due stime differiranno di poco.

Il disporre soltanto di stime, per di più diverse fra loro, anziché di un valore preciso, può suscitare un certo fastidio, e far rimpiangere l'eleganza e la precisione formale della definizione classica rispetto a questo metodo alquanto rozzo, e monotono nell'ossessiva ripetizione di tante più prove quanto più vuole essere affidabile. Va sottolineato però che, nelle applicazioni pratiche, questo metodo di misurare la probabilità si rivela utile ed efficace, e consente di estendere notevolmente l'impiego di tecniche matematiche in svariati settori dell'attività umana.

***Esempio* 2**. Un padre di famiglia, trentenne, ha moglie e due figli piccoli. La moglie è casalinga e la coppia non dispone di beni di famiglia. Una morte prematura dell'uomo causerebbe, fra l'altro, gravi disagi economici. Egli stipula allora, con una compagnia di assicurazioni, il seguente contratto: se dovesse morire entro vent'anni, prima dell'età cinquanta, la compagnia verserà agli eredi la somma di trecentomila €, rivalutabile di anno in anno secondo l'aumento del costo della vita. In cambio egli versa oggi alla compagnia assicuratrice una somma, detta *premio*, che non verrà restituita in alcun caso.
È chiaro che, per determinare l'entità del premio, occorre stimare la probabilità che un trentenne muoia entro vent'anni. Tale stima non può basarsi su calcoli teorici, ma deve fondarsi su rilevazioni sperimentali. Se, ad esempio, vent'anni fa sono stati presi in esame 10.000 trentenni, e di essi 480 sono morti nel frattempo, la probabilità dell'evento "un trentenne muore entro vent'anni" verrà stimata con $\frac{480}{10.000}$ = 0,048 (e la cifra sulla base della quale calcolare il premio risulta di 300.000·0,048 € = 14.400 €).
In questo caso, a differenza del lancio di una puntina da disegno, non valutiamo sulla base di esperimenti effettuati e su numerose prove ripetute, ma su dati statistici sufficientemente ampi. Dal punto di vista pratico, comunque, le cose funzionano nello stesso modo.

§5 La definizione soggettiva della probabilità

Qual è la probabilità che questo pomeriggio piova? Che domani io sia interrogato di italiano? Che la Ferrari vinca la prossima gara di Formula uno? Che il prezzo delle azioni Fiat salga nei prossimi due mesi di almeno il 10%?
Si tratta di eventi irripetibili, unici nel loro genere, ai quali non ha senso applicare la definizione frequentista, e ancor meno quella classica. Eppure esiste, ed è più frequente di quanto si creda, una valutazione soggettiva della probabilità, come è testimoniato dal fatto che, in base ad essa, prenderò oppure no l'ombrello, studierò più italiano che matematica, scommetterò o meno sulla vittoria della Ferrari, acquisterò o venderò azioni Fiat.
Come al solito, la matematica sostituisce alla valutazione qualitativa un ben preciso valore quantitativo, una misura della probabilità dei vari eventi. A tal fine è utile introdurre il concetto di speranza matematica.

Definizione. Se una somma S è esigibile con probabilità p, si dice **speranza matematica** il prodotto $S \cdot p$.

***Esempio* 1**. Mi regalano un biglietto di una lotteria, con un unico premio del valore di 1.000 €, per la quale sono stati emessi 250 biglietti. Come valuto economicamente tale regalo?
La speranza matematica vale 1.000 · $\frac{1}{250}$ = 4 €. È come se mi avessero regalato 4 €.

***Esempio* 2**. In un'urna vi sono 3 palline bianche e 5 nere. Si estrae una pallina: se è bianca ricevo 10 €, altrimenti nulla.

La mia speranza matematica è $10 \cdot \frac{3}{8} = 3{,}75$ €. Il significato economico è il seguente: mi è indifferente ricevere 3,75 € con certezza oppure 10 € solo se esce una pallina bianca.
Supponiamo di effettuare un numero abbastanza elevato di prove, ad esempio 200, reinserendo ogni volta la pallina estratta nell'urna.
Se ad ogni estrazione ricevo 3,75 €, indipendentemente dal colore della pallina uscita, alla fine possiedo esattamente 3,75·200 = 750 €. Se invece ricevo 10 € soltanto quando esce una pallina bianca, in 200 lanci mi aspetto che tale evento si verifichi circa $200 \cdot \frac{3}{8} = 75$ volte. Il valore atteso della somma che possederò alla fine è 10·75 € = 750 €.

Questi concetti e questo modo di ragionare, basati sulle scommesse e sulle valutazioni di indifferenza economica, hanno il pregio di adattarsi perfettamente alla misura della probabilità di un evento qualsiasi, indipendentemente dal fatto che tutti i casi siano o no ugualmente possibili, o che si riesca oppure no ad effettuare numerose prove o a disporre di adeguati dati statistici.

In conclusione, possiamo dare la seguente:

Definizione soggettiva di probabilità. *Dato un qualsiasi evento E, se mi è indifferente ricevere la somma s incondizionatamente, oppure la somma S soltanto se E si verifica, si dice che la* **probabilità soggettiva** *p di quell'evento è*:

$$\boxed{p = \frac{s}{S}}$$

In tal modo le due speranze matematiche, $s \cdot 1$ e $S \cdot p$ coincidono: da $S \cdot p = s \cdot 1$ si ottiene infatti $p = \frac{s}{S}$.

In effetti, non importano le somme s e S, ma il loro rapporto $\frac{s}{S}$. Assumendo allora la somma S come unità di misura del denaro, la definizione soggettiva di probabilità può essere riformulata nel modo seguente:

La **probabilità soggettiva** *di un evento è p* (*con* $0 \le p \le 1$) *se è indifferente ricevere la somma p* (ad esempio in dollari, o in euro) *con certezza, oppure la somma* 1 (un dollaro, un euro) *solo se l'evento si verificherà.*

Infatti, in tal modo le due speranze matematiche sono uguali:

$$\underset{\text{somma}}{\underset{\uparrow}{p}} \quad \cdot \quad \underset{\text{probabilità}}{\underset{\uparrow}{1}} \quad = \quad \underset{\text{somma}}{\underset{\uparrow}{1}} \quad \cdot \quad \underset{\text{probabilità}}{\underset{\uparrow}{p}}$$

In ogni caso, alla base di tutto, vi è pur sempre una valutazione soggettiva.

- Mi danno una moneta: formulo l'ipotesi (soggettiva!) che non sia truccata e, seguendo la definizione classica, dico che la probabilità dell'evento "esce testa" è 0,5.
- Oppure non mi fido e la lancio mille volte ottenendo 520 teste. A questo punto, di nuovo, devo scegliere in base a una valutazione soggettiva. In base all'esito riscontrato, non troppo lontano dal valore atteso di 500 teste, posso ritenere che la moneta non sia truccata, e accettare adesso la definizione classica; altrettanto lecitamente, posso assumere la frequenza relativa 0,52 come stima della probabilità che al prossimo lancio esca testa.
- Accurate analisi mi hanno assicurato la perfetta simmetria della moneta; ho effettuato due milioni di lanci, e sono uscite esattamente un milione di teste. Penso però di essere particolarmente sfortunato al gioco, e mi è indifferente lavare i piatti nove volte io e una sola volta mia moglie, oppure affidare al lancio di quella moneta la scelta di chi dovrà lavare i piatti tutte e dieci le volte. È allora concettualmente corretto dire che attribuisco probabilità 0,1 all'uscita della faccia su cui ho puntato e 0,9 all'uscita della faccia a me sfavorevole.