CAPITOLO SECONDO – CALCOLO DELLE PROBABILITÀ

§1 Spazi di probabilità, eventi semplici ed eventi composti

Indichiamo con S lo spazio degli eventi. Esso è un insieme, i cui elementi sono detti ***eventi elementari***.

Nel lancio di un dado, lo spazio degli eventi S è costituito dai sei eventi elementari e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6 corrispondenti all'uscita di ciascuna delle sei facce: e_k = "esce il numero k".

La scelta di S è arbitraria, e dipende dagli scopi che ci proponiamo nella nostra descrizione. Sempre nel caso del lancio di un dado, potremmo essere interessati solo all'uscita di un numero pari o di un numero dispari, e allora assumeremmo lo spazio S costituito solo dai due eventi elementari e_1 = "esce un numero pari (0 o 2 o 4)" e e_2 = "esce un numero dispari (1 o 3 o 5)". Oppure potremmo essere interessati solo all'uscita dell'uno o del sei e quindi allo spazio S formato dai tre eventi elementari e_1 = "esce l'uno", e_2 = "esce il sei", e_3 = "non esce né l'uno né il sei".

Quando si esamina il lancio di due monete, di solito lo spazio S_1 degli eventi è costituito da quattro eventi elementari: **TT**, **TC**, **CT**, **CC**. Se siamo interessati soltanto al numero di teste uscite, nulla vieta di considerare lo spazio S_2 formato dai tre eventi elementari e_1 = "non esce alcuna testa", e_2 = "esce una testa", e_3 = "escono due teste".

In uno spazio S di probabilità, ***ad ogni evento elementare è associata una probabilità***: tale attribuzione è eseguita servendosi di una delle tre definizioni della probabilità (classica, frequentista, soggettiva) introdotte nel capitolo precedente, ma è determinata, in ultima analisi, sempre soggettivamente. Se si ricorre alla definizione classica è perché si ritiene (soggettivamente) che i casi possibili siano ugualmente possibili e, se si impiega quella frequentista, la valutazione quantitativa è soggettivamente vincolata al numero di prove, alle modalità della loro esecuzione o alla fiducia sui dati a disposizione. Le due condizioni che devono essere soddisfatte sono:

1) *La probabilità di ciascun evento elementare è non negativa*.
2) *La somma delle probabilità di tutti gli eventi elementari vale* 1.

***Esempio* 1**. Nel caso del lancio di una moneta lo spazio S è costituito dai due eventi elementari e_1 = "esce testa" e e_2 = "esce croce".

- Se riteniamo che la moneta sia buona, si può assumere la definizione classica:

eventi elementari	e_1	e_2
probabilità	0,5	0,5

- Se si hanno motivi di ritenere che la moneta non sia buona e, effettuati mille lanci, si ottengono circa 300 teste, appare naturale assumere il seguente spazio:

eventi elementari	e_1	e_2
probabilità	0,3	0,7

- Se si scommette su croce e si ritiene di essere particolarmente sfortunati, si può assumere il seguente spazio:

eventi elementari	e_1	e_2
probabilità	0,9	0,1

Solo l'esperienza può far decidere, per una data moneta, quale spazio descriva meglio gli esiti dei possibili lanci.

***Esempio* 2**. Domani si gioca la partita di calcio Italia-Svizzera per la qualificazione ai campionati del mondo. Consideriamo lo spazio S costituito dai tre eventi elementari:

e_1 = "vince l'Italia" e_2 = "le due squadre pareggiano" e_3 = "vince la Svizzera"

- Mimma, non competente in fatto di calcio, associa ai tre eventi elementari la stessa probabilità:

eventi elementari	e_1	e_2	e_3
probabilità	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

- Carlo, avendo a disposizione un annuario aggiornato, sa che nei precedenti 31 incontri, l'Italia ha vinto 21 volte, ha pareggiato 8 volte e perso solo 2 volte. Applica allora la definizione frequentista:

eventi elementari	e_1	e_2	e_3
probabilità	$\frac{21}{31}$	$\frac{8}{31}$	$\frac{2}{31}$

- Giovanni si documenta sullo stato di forma dei giocatori che scenderanno in campo, sull'arbitro, sullo stato del terreno di gioco e così via, e reputa che la probabilità di vittoria dell'Italia sia sei volte quella della Svizzera (ossia $p(e_1) = 6p(e_3)$) e che la probabilità di un pareggio sia tripla della probabilità di vittoria della Svizzera (ossia $p(e_2) = 3p(e_3)$).
Dato che $p(e_1) + p(e_2) + p(e_3) = 1$, si ha $6p(e_3) + 3p(e_3) + p(e_3) = 1$, da cui si ottiene $p(e_3) = \frac{1}{10}$ e quindi $p(e_1) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ e $p(e_2) = \frac{3}{10}$ Il suo spazio è:

eventi elementari	e_1	e_2	e_3
probabilità	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$

***Esempio* 3**. Si consideri il numero di figli maschi nelle famiglie aventi due figli. Lo spazio S è costituito dai tre eventi elementari:

e_1 = "nessun figlio maschio" e_2 = "un figlio maschio" e_3 = "due figli maschi"

- Se si attribuisce ai tre eventi elementari la stessa probabilità, si ha:

eventi elementari	e_1	e_2	e_3
probabilità	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

- Distinguiamo ora il primo dal secondo figlio. Si hanno quattro possibilità: entrambe le figlie femmine (**F F**), prima figlia femmina e secondo figlio maschio (**F M**), primo figlio maschio e seconda figlia femmina (**M F**), entrambe i figli maschi (**M M**). Se assumiamo che i quattro casi siano ugualmente possibili, dato che due di essi sono favorevoli a e_2, $p(e_2)$ risulta doppia di $p(e_1)$ e $p(e_3)$ e lo spazio S è:

eventi elementari	e_1	e_2	e_3
probabilità	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

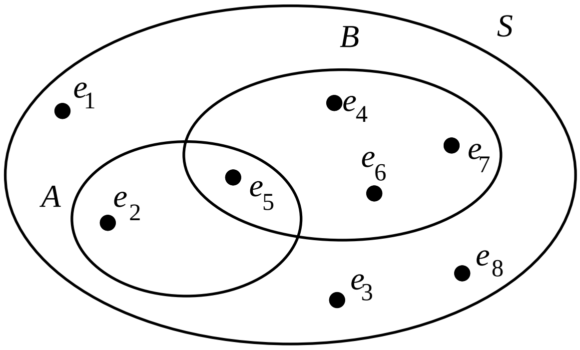
Questo spazio coincide con quello relativo all'uscita di due teste lanciando due volte una moneta buona. Il primo dei due spazi corrisponde invece all'interpretazione del matematico D'Alembert, e sembra molto discutibile. Nel caso del lancio della moneta il secondo spazio appare più corretto del primo. Cosa si può dire nel caso in esame?
In primo luogo, assimilare il sesso di un nascituro al lancio di una moneta costituisce senza dubbio una forzatura. Appare più ragionevole procurarsi dei dati sulle frequenze delle nascite maschili e femminili; in effetti le nascite maschili superano leggermente quelle femminili.

Attribuire probabilità 1/2 alla nascita di un maschio vale solo in prima approssimazione. In secondo luogo, anche assumendo equiprobabili la nascita di un maschio o di una femmina, non è affatto detto che, come accade nel caso della moneta, il sesso del secondo figlio non sia influenzato da quello del primo. Anche qui si potrebbe riscontrare sperimentalmente nelle coppie una predisposizione a generare figli di uno dei due sessi, per cui, se una coppia ha già avuto un primo figlio maschio, è più probabile che anche il secondo lo sia (e lo stesso per le femmine). Quindi, solo procurandosi dei dati si può introdurre uno spazio di probabilità che rispecchi fedelmente la situazione reale.

Supponiamo che da un'indagine risulti che, nei $\frac{2}{3}$ dei casi, il sesso del secondo figlio è uguale a quello del primo. Se, in prima approssimazione, ipotizziamo che siano equiprobabili la nascita di un maschio o di una femmina come primo figlio, date 300 coppie con due figli, 150 avranno il primo figlio maschio e di esse $\frac{2}{3} \cdot 150 = 100$ avranno entrambe i figli maschi. Analogamente 100 famiglie avranno entrambe le figlie femmine, e quindi le restanti 100 avranno un figlio maschio e una figlia femmina. Ebbene, in questo caso il primo spazio sarebbe più adeguato del secondo a descrivere il fenomeno in esame.

Definizione. Si dice ***evento composto*** un qualsiasi sottoinsieme dello spazio degli eventi S contenente almeno due eventi.

Con il termine "evento" senza attributi intendiamo un qualsiasi sottoinsieme di S, quindi tanto un evento *elementare*[1], quanto un evento *composto*. In particolare, il sottoinsieme vuoto $\varnothing$ corrisponde all'***evento impossibile*** e l'intero spazio S all'***evento certo***. Dato che S è, come nei casi finora considerati, un insieme finito, possiamo ricorrere anche alla rappresentazione con diagrammi di Eulero-Venn:



In essa sono rappresentati lo spazio S costituito dagli otto eventi elementari $e_1, e_2, ..., e_8$ ($S = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$) e gli eventi composti $A = \{e_2, e_5\}$ e $B = \{e_5, e_4, e_6, e_7\}$.

Una volta fissate le probabilità degli eventi elementari, sono automaticamente determinate le probabilità degli eventi composti:

> *La* **probabilità di un evento composto** *è uguale alla somma delle probabilità degli eventi elementari che lo compongono.*

Ad esempio, con riferimento allo spazio S in figura:

$$p(A) = p(e_2) + p(e_5) \qquad p(B) = p(e_5) + p(e_4) + p(e_6) + p(e_7)$$

Esempio 4. Gli amici del bar Sport decidono di organizzare una partita di calcio "scapoli contro ammogliati". Vincerà la squadra che per prima avrà segnato tre reti. I possibili esiti, con la stima delle rispettive probabilità, sono riportati nella tabella seguente:

[1] A stretto rigore, andrebbe distinto l'evento elementare e, che è un *elemento* di S, e $\{e\}$ che è il *sottoinsieme* di S che ha e come unico elemento. Dato che non vi è pericolo di confusione, identifichiamo e con $\{e\}$, in modo che anche gli eventi elementari rientrino tra i sottoinsiemi di S.

eventi elementari punteggio	e_1 3-0	e_2 3-1	e_3 3-2	e_4 2-3	e_5 1-3	e_6 0-3
probabilità	0,3	0,2	0,2	0,1	0,1	0,1

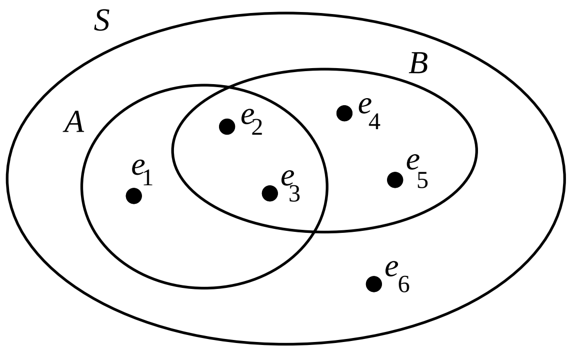
Determinare le probabilità dei seguenti eventi composti:

a) A = "vincono gli scapoli"
b) B = "la squadra perdente segna almeno un gol"
c) C = "vincono gli scapoli o la squadra perdente segna almeno un gol"
d) D = "vincono gli scapoli e la squadra perdente segna almeno un gol"
e) E = "la gara si conclude con un pareggio"
f) F = "la gara si conclude con la vittoria di una delle due squadre"

a) La vittoria degli scapoli si ha in corrispondenza degli eventi elementari e_1, e_2 e e_3 per cui $p(A) = p(e_1) + p(e_2) + p(e_3) = 0,3 + 0,2 + 0,2 = 0,7$.

b) La squadra perdente segna almeno un gol in corrispondenza degli eventi elementari e_2, e_3, e_4 e e_5; quindi:

$$p(B) = p(e_2) + p(e_3) + p(e_4) + p(e_5) = 0,2 + 0,2 + 0,1 + 0,1 = 0,6.$$



c) L'evento C = "vincono gli scapoli o la squadra perdente segna almeno un gol" corrisponde ad $A \cup B$ e si realizza in corrispondenza degli eventi elementari da e_1 a e_5; quindi

$$p(C) = p(A \cup B) = p(e_1) + p(e_2) + p(e_3) + p(e_4) + p(e_5) = 0,3 + 0,2 + 0,2 + 0,1 + 0,1 = 0,9.$$

d) L'evento D = "vincono gli scapoli e la squadra perdente segna almeno un gol" corrisponde ad $A \cap B$ e si realizza in corrispondenza degli eventi elementari e_2 e e_3; pertanto $p(D) = p(A \cap B) = p(e_2) + p(e_3) = 0,2 + 0,2 = 0,4$.

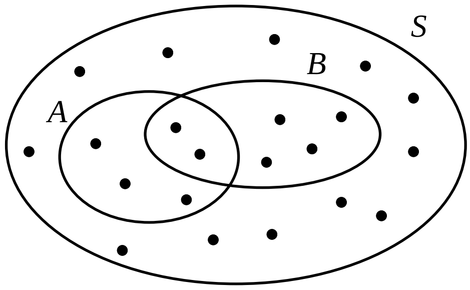
e) L'evento E, date le modalità della gara, non si può realizzare e quindi è *impossibile* ($E = \varnothing$). Si ha quindi $p(E) = 0$.

f) L'evento F si realizza in corrispondenza di tutti gli eventi elementari, quindi è *certo* e $p(F) = 1$.

§2 Probabilità totale e probabilità dell'evento contrario

A) Dati due eventi A e B sottoinsiemi di uno spazio S, l'evento unione $A \cup B$ è costituito dagli eventi elementari che compaiono in A oppure in B (o in entrambi). Vale il seguente:

Teorema della probabilità totale: $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

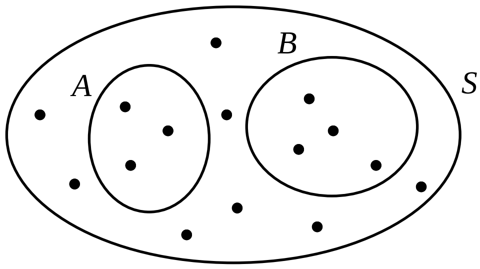


Per dimostrarlo basta osservare che:

- $p(A \cup B)$ è la somma delle probabilità degli eventi elementari che compongono A oppure B.
- $p(A) + p(B)$ è la stessa somma, dove però le probabilità degli eventi elementari che sono sia in A che in B, ossia in $A \cap B$, sono contate due volte.

In particolare, se gli eventi A e B sono **incompatibili**, ovvero se non hanno eventi elementari in comune (quindi, il verificarsi dell'uno esclude il verificarsi dell'altro), allora $A \cap B = \emptyset$, e si ha evidentemente:

Teorema della probabilità totale per eventi incompatibili: $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.



Quest'ultima formula si estende immediatamente al caso di più eventi a due a due incompatibili (con intersezione vuota). Ad esempio, se A, B e C sono tre eventi tali che $A \cap B = A \cap C = B \cap C = \emptyset$, allora $p(A \cup B \cup C) = p(A) + p(B) + p(C)$.

***Esempio* 1**. Un'urna contiene venti palline numerate da 1 a 20. Si calcoli la probabilità dell'evento C = "la pallina estratta ha un numero multiplo di 2 oppure ha un numero multiplo di 5".

I venti eventi elementari associati alle venti palline hanno tutti probabilità $\frac{1}{20}$.

- Gli eventi elementari che costituiscono C sono dodici e corrispondono alle palline 2, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20. Pertanto $p(C) = 12 \cdot \frac{1}{20} = \frac{3}{5}$.
- Allo stesso risultato si perviene pensando $C = A \cup B$ dove:

  A = "esce un numero multiplo di 2" =
  = {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20} con $p(A) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$.

  B = "esce un numero multiplo di 5" = {5, 10, 15, 20}, con $p(B) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$.

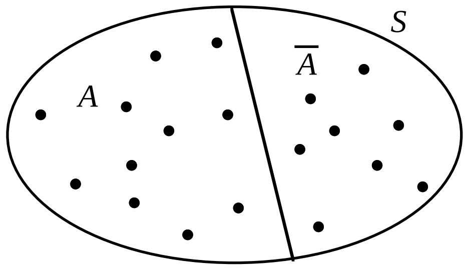
Dato che $A \cap B = \{10, 20\}$ e $p(A \cap B) = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$, si ha $p(A \cup B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.

***Esempio* 2**. Determinare la probabilità dell'evento "esce un numero minore di 3 o un numero maggiore di 4" relativamente al dado sequestrato ad un biscazziere, per il quale, indicando con e_k l'evento "esce il numero k", le probabilità risultano:

eventi elementari	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
probabilità	0,25	0,17	0,25	0,12	0,16	0,05

Posto: A = "esce un numero minore di 3"
B = "esce un numero maggiore di 4",
si ha $p(A) = 0,25 + 0,17 = 0,42$ $p(B) = 0,16 + 0,05 = 0,21$.
Dato che A e B sono incompatibili, si ha $p(A \cup B) = p(A) + p(B) = 0,42 + 0,21 = 0,63$.

B) Dato un evento A, si dice **evento contrario** ad A l'evento che si verifica quando ***non*** si verifica A, ossia l'evento $\overline{A}$ complementare di A.



Teorema della probabilità dell'evento contrario: $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$.
Dato che A e $\overline{A}$ sono eventi incompatibili ($A \cap \overline{A} = \varnothing$), e la loro unione è l'intero spazio S ($A \cup \overline{A} = S$), ossia l'evento certo, per il teorema della probabilità totale si ha:

$$1 = p(S) = p(A \cup \overline{A}) = p(A) + p(\overline{A}),$$

da cui: $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$ o anche $p(A) = 1 - p(\overline{A})$

***Esempio* 3**. Un'urna contiene 538 palline di cui 99 rosse, 117 verdi, 215 azzurre, 64 bianche e le rimanenti gialle. Calcolare la probabilità che, estraendo una pallina, essa non sia rossa.
La soluzione più rapida consiste nell'osservare, senza eseguire calcoli, che la probabilità dell'evento A = "esce una pallina rossa" è $\frac{99}{538}$. Quindi la probabilità di $\overline{A}$ = "non esce una pallina rossa" è $p(\overline{A}) = 1 - \frac{99}{538} = \frac{439}{538}$.

***Esempio* 4**. Trovare la probabilità che, lanciando due dadi, si ottenga come somma delle facce almeno quattro.
Dato che un punteggio maggiore o uguale di quattro si può ottenere in molti modi, conviene pensare l'evento come contrario a A = "si ottiene un punteggio inferiore a quattro". Gli eventi favorevoli ad A sono le tre coppie (1, 1), (1, 2), (2, 1) per cui:

$p(A) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$ e la probabilità richiesta è $p(\overline{A}) = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$.

§3 Probabilità composta

La regola della probabilità composta è, per le sue numerose applicazioni, la più importante del calcolo delle probabilità. D'altra parte è necessario fare su di essa alcune considerazioni alquanto complesse. Pertanto, ci limiteremo in un primo momento ad enunciarla ed illustrarla con alcuni esempi, rimandando al seguito del paragrafo la sua precisazione e la sua giustificazione.

Regola della probabilità composta

Siano A e B due eventi. Indichiamo con $A \cap B$ l'evento che si verifica se e soltanto se si verificano sia A sia B.
Se A e B sono ***indipendenti****, cioè il verificarsi dell'uno non influisce sulla probabilità dell'altro, la probabilità dell'evento $A \cap B$ è uguale al prodotto delle probabilità di A e B*:

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$$

Se i due eventi sono ***dipendenti****, cioè il verificarsi dell'uno influisce sulla probabilità dell'altro, si può applicare la stessa regola, purché con $p(B)$ si intenda la probabilità di B nell'ipotesi che A si sia verificato.*

***Esempio* 1**. Consideriamo:
- una moneta truccata: $p(T)$ è stimata con 0,3 e $p(C)$ con 0,7.
- una partita di calcio: i tre esiti *1*, *X*, *2* sono stimati rispettivamente con 0,5; 0,4 e 0,1.

Qual è la probabilità che lanciando la moneta venga testa e la partita si concluda con un pareggio? Per la regola della probabilità composta, essendo i due eventi evidentemente indipendenti $p(T \cap X) = p(T) \cdot p(X) = 0,3 \cdot 0,4 = 0,12$.

***Esempio* 2**. In un’urna vi sono due palline verdi e cinque rosse. Estraggo una pallina dall’urna e la metto da parte. Estraggo una seconda pallina. Qual è la probabilità che la prima pallina sia rossa e la seconda sia verde?

Posto A = “la prima pallina estratta è rossa”, allora $p(A) = \frac{5}{7}$.

Sia B = “la seconda pallina estratta è verde” (dopo che è stata estratta una prima pallina e questa è risultata rossa).

Poiché nell’urna sono rimaste sei palline, due verdi e quattro rosse, allora $p(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Per la regola della probabilità composta $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B) = \frac{5}{7} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{21}$.

La regola è valida anche se gli eventi sono più di due:

$$p(A \cap B \cap C \cap ...) = p(A) \cdot p(B) \cdot p(C) \cdot ...$$

dove $p(B)$ è la probabilità di B nell’ipotesi che A si sia verificato, $p(C)$ è la probabilità di C nell’ipotesi che A e B si siano verificati, ecc.

***Esempio* 3**. Si estraggono cinque carte da un mazzo da quaranta. Le carte via via estratte non vengono reimmesse nel mazzo. Qual è la probabilità che le prime tre siano assi e le ultime due siano figure?

La probabilità che la prima carta estratta sia un asso è $\frac{4}{40} = \frac{1}{10}$.

La probabilità che la seconda carta estratta sia un asso, nell’ipotesi che la prima estratta sia un asso, è $\frac{3}{39} = \frac{1}{13}$.

La probabilità che la terza carta estratta sia un asso, nell’ipotesi che siano già stati estratti due assi, è $\frac{2}{38} = \frac{1}{19}$.

La probabilità che la quarta carta estratta sia una figura, nell’ipotesi che siano già stati estratti tre assi, è $\frac{12}{37}$.

La probabilità che la quinta carta estratta sia una figura, nell’ipotesi che siano già stati estratti tre assi e una figura, è $\frac{11}{36}$. Per la regola della probabilità composta, la probabilità dell’evento in esame è: $\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{19} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{11}{36} \cong 0{,}00004$.

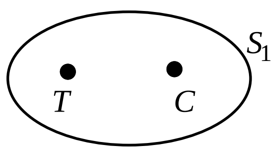
Chiariamo ora alcuni punti relativi alla regola della probabilità composta.

Riprendiamo in esame l’***Esempio* 1**. Consideriamo:

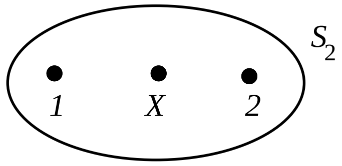
- una moneta truccata: $p(T)$ è stimata con 0,3 e $p(C)$ con 0,7.
- una partita di calcio: i tre esiti *1*, *X*, *2* sono stimati rispettivamente con 0,5; 0,4 e 0,1.

Qual è la probabilità che lanciando la moneta venga testa e la partita si concluda con un pareggio?

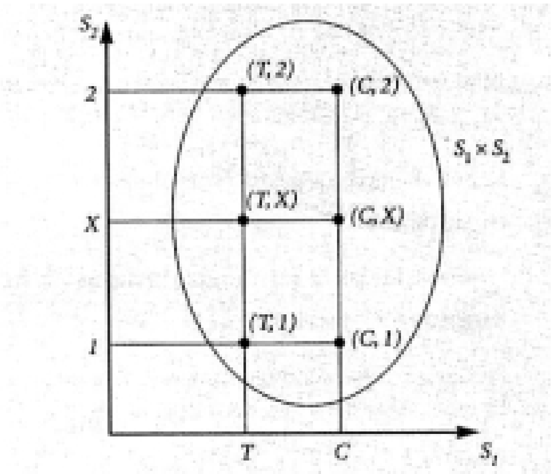
L’evento “esce testa”, che abbiamo indicato con T, appartiene ad uno spazio di eventi, chiamiamolo S_1, formato dai due eventi elementari T = “esce testa” e C = “esce croce”:



L’evento “la partita si chiude con un pareggio”, che abbiamo indicato con X, appartiene ad uno spazio di eventi completamente diverso, chiamiamolo S_2, formato da tre eventi elementari: *1* = “vince la squadra di casa”; *X* = “la partita si conclude con un pareggio”; *2* = “vince la squadra in trasferta”:



L’evento di cui cerchiamo la probabilità, e che abbiamo prima indicato con $T \cap X$ (“lanciando la moneta viene testa e la partita si conclude con un pareggio”) non appartiene evidentemente né a S_1 né a S_2. *Esso appartiene invece al prodotto cartesiano* $S_1 \times S_2$ *dei due insiemi*: $S_1 \times S_2 = \{(T, 1), (T, X), (T, 2), (C, 1), (C, X), (C, 2)\}$ *ed è l’evento elementare che nella rappresentazione cartesiana, è denotato con* (T, X).

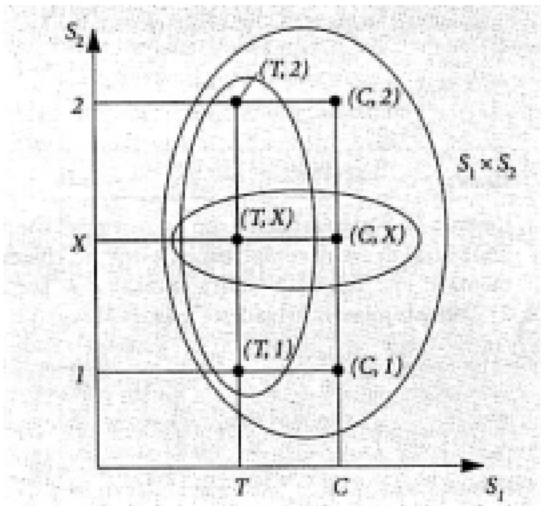


Perché allora in precedenza l’abbiamo chiamato $T \cap X$? In effetti abbiamo compiuto un abuso di linguaggio e la scrittura corretta sarebbe $(T \times S_2) \cap (S_1 \times X)$ $((\{T\} \times S_2) \cap (S_1 \times \{X\}))$ Infatti, l’evento “lanciando la moneta esce testa e la partita si conclude con un pareggio”, è relativo allo spazio $S_1 \times S_2$ ed è l’intersezione dei due eventi:

$T \times S_2$ = “lanciando la moneta esce testa e la partita si conclude con un qualsiasi risultato”

e:

$S_1 \times X$ = “il lancio della moneta ha un qualsiasi esito e la partita si conclude con un pareggio”.



Chiarito a quale spazio di eventi appartiene $T \cap X$, ossia $S_1 \times S_2$, resta da giustificare il fatto che $p(T \cap X) = p(T) \cdot p(X)$. Ora, mentre S_1 e S_2 sono spazi di probabilità, cioè insiemi di eventi elementari a ciascuno dei quali è assegnata una certa probabilità, *per il momento* $S_1 \times S_2$ è soltanto un insieme ai cui elementi *dobbiamo ancora assegnare una probabilità*.

Ciò può avvenire sulla base delle seguenti considerazioni.

1) La probabilità dell'evento (di $S_1 \times S_2$) "lanciando la moneta esce testa e la partita si conclude con un qualsiasi risultato" deve essere uguale alla probabilità dell'evento (di S_1) "esce testa": $p(T, 1) + p(T, X) + p(T, 2) = p(T)$.
2) Poiché l'esito del lancio della moneta non influenza in alcun modo il risultato della partita, le probabilità dei tre eventi $(T, 1)$, (T, X), $(T, 2)$ devono essere proporzionali alle probabilità degli eventi *1*, *X*, *2*: $p(T, 1) : p(1) = p(T, X) : p(X) = p(T, 2) : p(2)$.

Le due condizioni si soddisfano imponendo che sia:

$$p(T, 1) = p(T) \cdot p(1) = 0{,}3 \cdot 0{,}5 = 0{,}15$$
$$p(T, X) = p(T) \cdot p(X) = 0{,}3 \cdot 0{,}4 = 0{,}12$$
$$p(T, 2) = p(T) \cdot p(2) = 0{,}3 \cdot 0{,}1 = 0{,}03$$

Con considerazioni perfettamente analoghe si conclude che deve essere:

$$p(C, 1) = p(C) \cdot p(1) = 0{,}7 \cdot 0{,}5 = 0{,}35$$
$$p(C, X) = p(C) \cdot p(X) = 0{,}7 \cdot 0{,}4 = 0{,}28$$
$$p(C, 2) = p(C) \cdot p(2) = 0{,}7 \cdot 0{,}1 = 0{,}07$$

In definitiva, la probabilità di un evento elementare dello spazio prodotto cartesiano $S_1 \times S_2$ è il prodotto delle probabilità dei due eventi componenti, il primo in S_1 e il secondo in S_2.

Esaminiamo ora, considerando l'Esempio 2, il caso in cui fra i due spazi S_1 e S_2 vi sia correlazione: il verificarsi di un certo evento, piuttosto che di un altro, del primo spazio influenza la probabilità degli eventi del secondo.

***Esempio* 2**. In un'urna vi sono due palline verdi e cinque rosse. Estraggo una pallina dall'urna e la metto da parte. Estraggo una seconda pallina. Qual è la probabilità che la prima pallina sia rossa e la seconda sia verde?

Come in precedenza si parte dalla considerazione di due spazi di eventi.
Il primo, che chiamiamo S_1, è formato dai due eventi elementari:

- v_1 = "la prima pallina estratta è verde"; $p(v_1) = \frac{2}{7}$
- r_1 = "la prima pallina estratta è rossa"; $p(r_1) = \frac{5}{7}$.

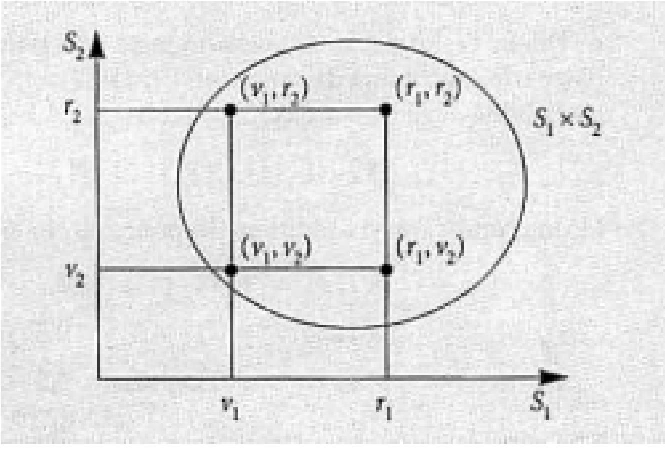
Anche il secondo, che chiamiamo S_2, è formato da due eventi elementari:

- v_2 = "la seconda pallina estratta è verde"
- r_2 = "la seconda pallina estratta è rossa"

$$p(v_2) = \begin{cases} \frac{1}{6} & \text{se si è verificato } v_1 \\ \frac{2}{6} & \text{se si è verificato } r_1 \end{cases} \qquad p(r_2) = \begin{cases} \frac{5}{6} & \text{se si è verificato } v_1 \\ \frac{4}{6} & \text{se si è verificato } r_1 \end{cases}$$

L'evento di cui stiamo cercando la probabilità, e che possiamo indicare con (r_1, v_2), non appartiene né a S_1 né a S_2 *ma* al prodotto cartesiano $S_1 \times S_2$ dei due insiemi:

$$S_1 \times S_2 = \{(v_1, v_2), (v_1, r_2), (r_1, v_2), (r_1, r_2)\}$$



$S_1 \times S_2$ è per il momento soltanto un insieme, ai cui elementi dobbiamo ancora associare una probabilità. Ragionando come nell'esempio precedente, si conclude che deve essere:

$$p(v_1, v_2) = p(v_1) \cdot p(v_2) = \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{21}$$

$$p(v_1, r_2) = p(v_1) \cdot p(r_2) = \frac{2}{7} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{21}$$

dove con $p(v_2)$ e $p(r_2)$ si devono intendere le probabilità di v_2 e di r_2 nell'ipotesi che sia verificata v_1;

$$p(r_1, v_2) = p(r_1) \cdot p(v_2) = \frac{5}{7} \cdot \frac{2}{6} = \frac{5}{21}$$

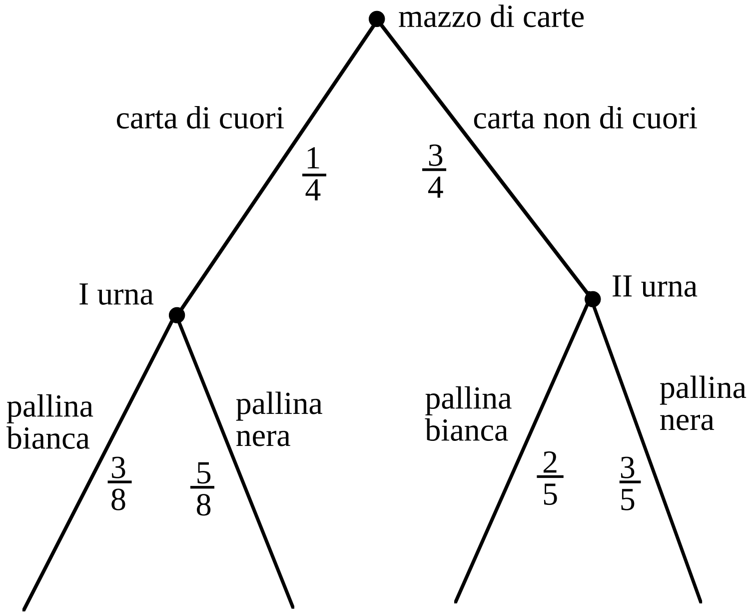
$$p(r_1, r_2) = p(r_1) \cdot p(r_2) = \frac{5}{7} \cdot \frac{4}{6} = \frac{10}{21}$$

dove con $p(v_2)$ e $p(r_2)$ si devono intendere le probabilità di v_2 e di r_2 nell'ipotesi che sia verificata r_1.

§4 Problemi più complessi di calcolo delle probabilità

Come già detto, le regole della probabilità totale e dell'evento contrario acquistano importanza pratica solo se associate alla regola della probabilità composta. Esaminiamo alcuni problemi, un po' più complessi di quelli affrontati finora, in cui ciò si verifica.

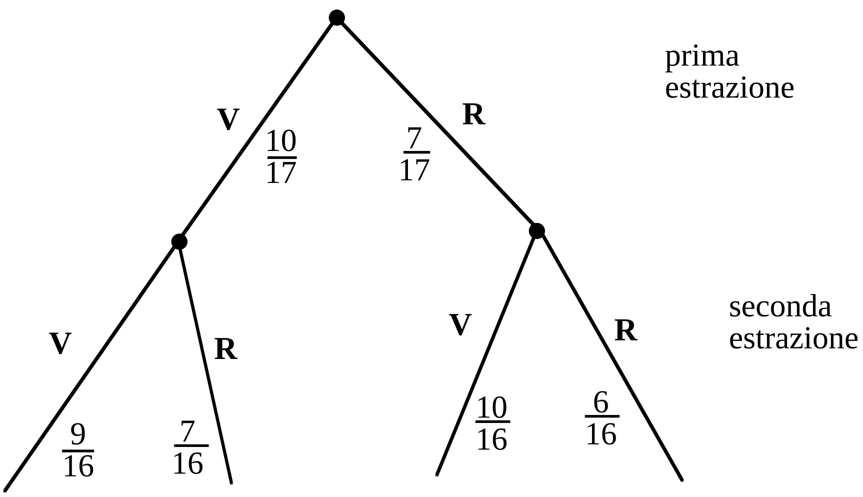
***Esempio* 1**. Sono date due urne. La prima contiene 3 palline bianche e 5 nere, mentre la seconda contiene 2 palline bianche e 3 nere. Si estrae una carta da un mazzo da quaranta. Se viene una carta di cuori si estrae una pallina dalla prima urna, altrimenti la si estrae dalla seconda. Qual è la probabilità di estrarre una pallina bianca?
Aiutiamoci con un diagramma ad albero: i quattro rami rappresentano i possibili percorsi fra loro incompatibili e, in ciascun tratto, riportiamo la rispettiva probabilità:



Per la regola della probabilità composta, la probabilità che venga estratta una pallina bianca dalla prima urna è $\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{8} = \frac{3}{32}$. Analogamente, la probabilità che venga estratta una pallina bianca dalla seconda urna è $\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{3}{10}$. Per la regola della probabilità totale la probabilità richiesta, che si ottenga una pallina bianca dalla prima o dalla seconda urna, è:

$$\frac{3}{32} + \frac{3}{10} = \frac{63}{160}.$$

Esempio 2. Un'urna contiene 10 palline verdi e 7 palline rosse. Si estraggono successivamente due palline, senza rimettere la prima nell'urna.
Qual è la probabilità che siano:
a) dello stesso colore;
b) di colore diverso;
c) almeno una rossa?
Procediamo come nell'esempio precedente costruendo un diagramma ad albero: i tratti in alto corrispondono alla prima pallina estratta, quelli in basso alla seconda. Le probabilità in questi ultimi sono determinate supponendo che l'evento in alto si sia verificato:



Ad esempio, considerato il ramo a sinistra (**VV**), nel primo tratto figura la probabilità $\frac{10}{17}$ che la prima pallina estratta sia verde, nel secondo la probabilità $\frac{9}{16}$ che la seconda pallina sia verde *nell'ipotesi che la prima sia verde* (delle 16 palline ancora nell'urna, solo 9 sono verdi). Così, nel ramo (**RV**), nel primo tratto figura la probabilità $\frac{7}{17}$ che la prima pallina estratta sia rossa, nel secondo la probabilità $\frac{10}{16}$ che la seconda estratta sia verde *nell'ipotesi che la prima pallina sia rossa* (tra le 16 palline rimaste vi sono tutte e 10 le palline verdi).

a) Per la regola della probabilità composta, la probabilità che entrambe le palline siano verdi, ossia che si verifichi l'evento **VV**, è $\frac{10}{17} \cdot \frac{9}{16} = \frac{45}{136}$.
Analogamente, la probabilità che entrambe le palline siano rosse, ossia che si verifichi l'evento **RR**, risulta $\frac{7}{17} \cdot \frac{6}{16} = \frac{21}{136}$.
Quindi, la probabilità dell'evento "le palline sono dello stesso colore", ossia entrambe verdi o entrambe rosse, per la regola della probabilità totale, è $\frac{45}{136} + \frac{21}{136} = \frac{66}{136} = \frac{33}{68}$.

b) Per calcolare la probabilità dell'evento "le palline sono di colore diverso", anziché sommare la probabilità che la prima sia verde e la seconda rossa con quella che la prima sia rossa e la seconda verde, possiamo sfruttare quanto ottenuto in a) e applicare la regola della probabilità dell'evento contrario; infatti l'evento "le palline sono di colore diverso" è contrario di "le palline sono dello stesso colore", e quindi la sua probabilità è$1 - \frac{33}{68} = \frac{35}{68}$.

c) La probabilità dell'evento "almeno una pallina è rossa" è la somma delle probabilità dei tre eventi **VR**, **RV**, **RR**. Più rapidamente si può calcolare la probabilità dell'evento contrario a **VV** ("le palline sono entrambe verdi"): $1 - \frac{45}{136} = \frac{91}{136}$.

***Esempio* 3**. Qual è la probabilità che, date quattro persone, almeno due siano nate nello stesso giorno della settimana?
Il calcolo diretto si presenta alquanto complesso, dato che l'evento E = "date quattro persone, almeno due sono nate nello stesso giorno della settimana" si può realizzare in molti modi (quando le persone sono nate tutte e quattro nello stesso giorno della settimana, o quando tre di esse o due sono nate nello stesso giorno della settimana). È più facile calcolare la probabilità dell'evento contrario $\overline{E}$: "date quattro persone, esse sono nate in quattro giorni diversi della settimana".

Indipendentemente dal giorno della settimana in cui è nata la prima persona, la probabilità che la seconda persona non sia nata nello stesso giorno della prima è $\frac{6}{7}$. La probabilità che la terza persona sia nata in un giorno della settimana diverso dalle prime due è $\frac{5}{7}$. Infine, la probabilità che la quarta persona sia nata in un giorno della settimana diverso dalle prime tre è $\frac{4}{7}$. L'evento $\overline{E}$ è composto dai tre precedenti e quindi: $p(\overline{E}) = \frac{6}{7} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{4}{7} = \frac{120}{343}$. In definitiva $p(E) = 1 - p(\overline{E}) = 1 - \frac{120}{343} = \frac{223}{343} \cong 0{,}65$.

***Esempio* 4**. La probabilità che un automobilista abbia in un giorno un incidente, anche lieve come l'ammaccatura di un paraurti, è $\frac{1}{1000}$. Qual è la probabilità che, nei prossimi 1000 giorni, egli abbia almeno un incidente?
Detto E l'evento "nei prossimi 1000 giorni l'automobilista avrà almeno un incidente", l'evento $\overline{E}$, assai più semplice, è "nei prossimi 1000 giorni l'automobilista non avrà alcun incidente".
Evidentemente $\overline{E} = E_1 \cap E_2 \cap ... \cap E_{1000}$, dove E_k è l'evento "fra k giorni l'automobilista non avrà alcun incidente". Per la regola della probabilità dell'evento contrario:

$$p(E_k) = 1 - \frac{1}{1000} = \frac{999}{1000} = 0{,}999$$

e, per la regola della probabilità composta:

$$p(\overline{E}) = p(E_1 \cap E_2 \cap ... \cap E_{1000}) = p(E_1) \cdot p(E_2) \cdot ... \cdot p(E_{1000}) = 0{,}999^{1000} \cong 0{,}3677.$$

Applicando ancora la regola della probabilità dell'evento contrario, si ha infine:

$$p(E) = 1 - p(\overline{E}) \cong 0{,}6323.$$

§5 Probabilità condizionata e indipendenza

In molte circostanze, dopo aver introdotto uno spazio S di probabilità, si ricevono ulteriori informazioni che rendono inattendibili le probabilità assegnate agli eventi elementari e richiedono sia una modifica di S, sia una nuova determinazione delle probabilità.

***Esempio* 1**. Consideriamo lo spazio S relativo a un dado non truccato:

eventi elementari	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
probabilità	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

dove e_k è l'evento "esce il numero k".
Se si viene a sapere che, lanciando il dado, si è verificato l'evento E = "è uscito un numero dispari", automaticamente vengono azzerate le probabilità degli eventi e_2, e_4, e_6. Appare allora naturale limitare lo spazio S agli eventi e_1, e_3, e_5 e, continuando ad attribuire ad essi la stessa probabilità, considerare al posto del precedente spazio S il seguente:

eventi elementari	e_1	e_3	e_5
probabilità	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

È quindi ad esempio $\frac{1}{3}$ la probabilità che esca 1, supposto che sia uscito un numero dispari.
Si noti che il valore $\frac{1}{3}$ si ottiene dividendo la probabilità precedente, ossia $\frac{1}{6}$, per $p(E) = p($"è uscito un numero dispari"$) = \frac{1}{2}$.

***Esempio* 2**. Uno scommettitore attribuisce ai quattro cavalli A, B, C, D impegnati in una corsa le seguenti probabilità di vittoria:

eventi elementari	vince A	vince B	vince C	vince D
probabilità	0,4	0,2	0,3	0,1

Prima della corsa viene a sapere che A si è azzoppato. Pertanto, egli esclude la possibilità di vittoria di A e riduce lo spazio a E = {vince B, vince C, vince D}.
Le tre nuove probabilità degli eventi "vince B", "vince C", "vince D" si possono ottenere dividendo per $p(E) = 0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}1 = 0{,}6$, ossia per la probabilità iniziale dell'evento E =

{vince B, vince C, vince D} che si è verificato, le probabilità assegnate nello spazio iniziale agli eventi elementari rimasti:

$$p(\text{vince B}) = \frac{0{,}2}{0{,}6} = \frac{1}{3} \qquad p(\text{vince C}) = \frac{0{,}3}{0{,}6} = \frac{1}{2} \qquad p(\text{vince D}) = \frac{0{,}1}{0{,}6} = \frac{1}{6}$$

In tal modo, infatti, le nuove probabilità risultano proporzionali a quelle iniziali e la loro somma $\frac{0{,}2}{0{,}6} + \frac{0{,}3}{0{,}6} + \frac{0{,}1}{0{,}6}$ è evidentemente uguale a 1.

Il nuovo spazio è allora:

eventi elementari	vince B	vince C	vince D
probabilità	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

In generale, quando è dato uno spazio $S = \{e_1, e_2, e_3,..., e_n\}$ e si viene a sapere che si è realizzato un certo evento E costituito dagli eventi elementari $e'_1, e'_2,..., e'_k$, non vengono più presi in considerazione gli altri eventi elementari e si costruisce un nuovo spazio S':

eventi elementari	e'_1	e'_2	.....	e'_k
probabilità	$p(e'_1)$	$p(e'_2)$	.....	$p(e'_k)$

in modo che le nuove probabilità $p(e'_1), p(e'_2),..., p(e'_k)$:

1) abbiano somma 1
2) siano proporzionali alla probabilità che gli eventi $e'_1, e'_2,..., e'_k$ avevano nello spazio S.

Lo spazio S' è detto spazio ***condizionato*** ad E e le nuove probabilità sono dette anch'esse ***condizionate*** ad E.

Le probabilità condizionate ad E si possono facilmente ottenere con la seguente regola:

Le probabilità degli eventi elementari nello spazio S' si ottengono dividendo le rispettive probabilità nello spazio S per la probabilità di E calcolata nello spazio S.

Infatti, come si è illustrato nell'Esempio 2, con questa regola si ottengono dei valori proporzionali a quelli originari (i quali vengono divisi tutti per $p(E)$) e la cui somma è 1, trattandosi di frazioni aventi tutte lo stesso denominatore $p(E)$ e come somma dei numeratori proprio $p(E)$.

Si può ora facilmente estendere il discorso dagli eventi elementari a quelli composti.
Sia dato uno spazio S di probabilità e sia A un evento relativo a tale spazio (ossia un sottoinsieme di S). Supponiamo che un evento B si sia realizzato. Ciò evidentemente altera la probabilità di A: gli eventi elementari di A che non appartengono a B assumono probabilità nulla, mentre gli eventi elementari di A che appartengono a B (ossia quelli in $A \cap B$) assumono la probabilità condizionata a B. La nuova probabilità di A è detta ***probabilità di*** A ***condizionata a*** B e si indica $p(A/B)$.
Se si osserva che vengono presi in considerazione solo gli eventi elementari di $A \cap B$ e si ricorda che le probabilità condizionate a B si ottengono dividendo quelle iniziali per $p(B)$, resta giustificata la seguente formula: $p(A/B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)}$

nella quale $p(A \cap B)$ e $p(B)$ sono calcolate nello spazio di probabilità S.

Dalla formula precedente, moltiplicando ambo i membri per $p(B)$ e leggendo da destra a sinistra, si ottiene:

$$p(A \cap B) = p(B) \cdot p(A/B)$$

ossia la probabilità di $A \cap B$, l'evento che si realizza quando si verificano sia A, sia B, è uguale al prodotto della probabilità di B e della probabilità di A supposto che si sia verificato B. Si tratta di una formulazione della regola della probabilità composta nella quale interviene la probabilità condizionata.

È naturale affermare che A è ***indipendente*** da B se e solo se $p(A/B) = p(A)$ ossia se il verificarsi di B non fa cambiare la probabilità di A.

Se A è indipendente da B, sostituendo $p(A/B)$ con $p(A)$ nella formula precedente, si ottiene:

$$p(A \cap B) = p(B) \cdot p(A).$$

Si dimostra facilmente che, viceversa, se vale quest'ultima uguaglianza, gli eventi sono indipendenti.

A proposito dell'analogia tra queste formule e quelle relative alla probabilità composta è bene rilevare che ora stiamo considerando eventi A e B *dello stesso spazio* S, mentre nel §3 si trattava di eventi relativi a *spazi di probabilità differenti*. In altri termini, l'ultima formula non serve a calcolare $p(A \cap B)$, che si ottiene facilmente sommando le proprietà degli eventi elementari che appartengono a $A \cap B$, ma a stabilire se A e B sono o non sono indipendenti.

***Esempio* 3**. Si lanciano tre monete buone. Si considerino i due eventi:
A = "si ottiene al massimo una testa"
B = "si ottengono sia teste che croci".
Stabilire se A e B sono indipendenti.

Gli eventi elementari sono otto **TTT**, **TTC**, **TCT**, **TCC**, **CTT**, **CTC**, **CCT**, **CCC** e ciascuno ha probabilità $\frac{1}{8}$.

Si ha: A = {**TCC**, **CTC**, **CCT**, **CCC**} e $p(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

B = {**TTC**, **TCT**, **TCC**, **CTT**, **CTC**, **CCT**} e $p(B) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$.

$A \cap B$ = {**TCC**, **CTC**, **CCT**} e $p(A \cap B) = \frac{3}{8}$.

Dato che $\frac{3}{8} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}$ vale $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$ e si può concludere che i due eventi sono *indipendenti*.

***Esempio* 4**. Ripetere il precedente Esempio 3, ma relativo al lancio di due sole monete.

Gli eventi elementari sono quattro **TT**, **TC**, **CT**, **CC** e ciascuno ha probabilità $\frac{1}{4}$.

Si ha: A = {**TC**, **CT**, **CC**} e $p(A) = \frac{3}{4}$.

B = {**TC**, **CT**} e $p(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

$A \cap B$ = {**TC**, **CT**} e $p(A \cap B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Dato che $p(A \cap B) = \frac{1}{2} \neq \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = p(A) \cdot p(B)$ i due eventi A e B sono *dipendenti*.

Questi ultimi due esempi illustrano quanto affermato in precedenza: il fatto che nel primo A e B siano indipendenti, mentre non lo sono nel secondo, indica che l'indipendenza di due eventi dello stesso spazio può essere stabilita solo *a posteriori*, vale a dire dopo aver eseguito i calcoli.

§6. Applicazioni del calcolo combinatorio al calcolo delle probabilità

A) ***La moneta e l'urna***

•) Si lancia cinque volte una moneta buona. Qual è la probabilità che escano tre teste?

I casi possibili sono le disposizioni con ripetizione dei due elementi **T**, **C** a cinque a cinque: $D'_{2,5} = 2^5 = 32$. I casi favorevoli sono le combinazioni dei cinque lanci a tre a tre: $C_{5,3} = 10$.

La probabilità richiesta è $\frac{10}{32} = 0{,}3125$.

••) Si lancia cinque volte una moneta truccata, per la quale $p(\mathbf{T}) = 0{,}6$ e $p(\mathbf{C}) = 0{,}4$. Qual è la probabilità che escano tre teste?

In questo caso non si può applicare la definizione classica di probabilità in quanto gli eventi elementari non sono ugualmente possibili; ad esempio, dato che l'uscita di testa è più probabile di quella di croce, l'uscita di cinque teste è più probabile di quella di cinque croci.
Procediamo allora con i teoremi del calcolo delle probabilità.
Consideriamo una sequenza favorevole quale **T C T T C**, ossia "testa al primo lancio, croce al secondo, testa al terzo, testa al quarto e croce al quinto". Essendo l'esito di ciascun lancio indipendente da quello degli altri, per il teorema della probabilità composta, la probabilità che esca la sequenza **T C T T C** è:

$$0{,}6 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4 = 0{,}6^3 \cdot 0{,}4^2 .$$

La probabilità che esca un'altra qualsiasi sequenza con tre teste e due croci è sempre $0{,}6^3 \cdot 0{,}4^2$: cambia solo l'ordine dei tre fattori 0,6 e dei due fattori 0,4. Tutte le sequenze di questo tipo hanno la stessa probabilità e sono in numero di $C_{5,3}$. Per il teorema delle probabilità totali la probabilità dell'evento "escono tre teste" è la somma delle probabilità dell'uscita delle singole sequenze, cioè $C_{5,3} \cdot 0{,}6^3 \cdot 0{,}4^2 \cong 0{,}35$.

•••) Un'urna contiene sei palline rosse e quattro verdi. Si estraggono cinque palline, reimmettendo ogni volta la pallina estratta nell'urna. Qual è la probabilità che il risultato rispecchi la composizione dell'urna, ossia che escano tre palline rosse e due verdi?

La probabilità di estrarre una pallina rossa è 0,6, quella di estrarre una pallina verde è 0,4 e queste probabilità sono le stesse ad ognuna delle successive estrazioni (dato che ogni volta si rimette nell'urna la pallina estratta). Il procedimento è lo stesso di quello relativo alla moneta truccata esaminato al punto ••), per cui la probabilità richiesta è:

$$C_{5,3} \cdot 0{,}6^3 \cdot 0{,}4^2 \cong 0{,}35.$$

••••) Un'urna contiene sei palline rosse e quattro verdi. Si estraggono cinque palline, senza rimettere la pallina estratta nell'urna. Qual è la probabilità che il risultato rispecchi la composizione dell'urna, ossia che escano tre palline rosse e due verdi?

Il numero dei casi possibili è dato dalle combinazioni delle dieci palline a cinque a cinque: $C_{10,5} = 252$.
I casi favorevoli sono quelli in cui a una terna di palline rosse (che sono in numero di $C_{6,3}$) si associa una coppia di palline verdi (che sono in numero di $C_{4,2}$). Per il principio di moltiplicazione, il numero dei casi favorevoli è $C_{6,3} \cdot C_{4,2} = 120$.

La probabilità richiesta è $\frac{120}{252} \cong 0{,}48$.

Si noti che, senza reimmissione, la probabilità che sia rispecchiata la composizione dell'urna, ossia 0,48, è alquanto più elevata rispetto al caso precedente, con la reimmissione della pallina estratta nell'urna, in cui la probabilità è 0,35. Pertanto, se si vuole conoscere la composizione di un'urna estraendone un campione, è più conveniente procedere senza reimmissione.

B) ***Lo scopone scientifico***

Nello scopone scientifico si usa un mazzo da quaranta carte e si danno dieci carte a ciascuno dei quattro giocatori. Calcolare la probabilità che un giocatore sia servito in modo da avere:
a) tutti i sette;
b) esattamente un sette;

c) esattamente un sette, due assi e tre figure;
d) tutte le carte dall'asso al re (ossia un asso, un due, un tre,..., una donna, un re).

Evidentemente non conta l'ordine con cui il giocatore riceve le carte. I casi possibili sono tutti i possibili raggruppamenti delle quaranta carte a dieci a dieci:

$C_{40,10}$ = 847.660.528.

a) Se il giocatore ha tutti i sette, le rimanenti sei carte sono scelte fra le trentasei carte del mazzo che non sono sette. I casi favorevoli all'evento sono quindi $C_{36,6}$ = 1.947.792. La probabilità richiesta è $\frac{1.947.792}{847.660.528} \cong 0{,}0023$.

b) Il sette può essere scelto in 4 modi; le altre nove carte vanno scelte fra le trentasei del mazzo che non sono sette, e ciò può essere fatto in $C_{36,9}$ modi. I casi favorevoli all'evento sono quindi $4 \cdot C_{36,9}$ = 376.573.120.

La probabilità richiesta è $\frac{376.573.120}{847.660.528} \cong 0{,}444$.

c) Le possibili scelte dell'unico sette sono 4, della coppia di assi sono $C_{4,2}$, delle tre figure sono $C_{12,3}$. Infine, per le restanti quattro carte, che vanno prese fra le venti del mazzo che non sono né sette, né assi, né figure, sono $C_{20,4}$.

Per il principio di moltiplicazione, il numero dei casi favorevoli è:

$4 \cdot C_{4,2} \cdot C_{12,3} \cdot C_{20,4}$ = 25.581.600.

Pertanto, la probabilità richiesta è $\frac{25.581.600}{847.660.528} \cong 0{,}03$.

d) Abbiamo quattro scelte per l'asso, quattro scelte per il due,..., quattro scelte per il re. I casi possibili sono 4^{10} = 1.048.576. La probabilità richiesta è $\frac{1.048.576}{847.660.528} \cong 0{,}001$.

C) *Il gioco del lotto*

Nel gioco del lotto si estraggono cinque numeri da un'urna che contiene i numeri da 1 a 90, e non conta l'ordine di estrazione. Il giocatore punta una certa somma sull'uscita di un dato numero, o di due (ambo), o di tre (terno), o di quattro (quaterna), o di cinque (cinquina). Le estrazioni avvengono due volte alla settimana in dieci sedi, dette *ruote*, situate nelle maggiori città italiane. Il giocatore può puntare sulla singola ruota, ad esempio quella di Genova, e allora conteranno solo i numeri estratti in quella sede, oppure su più ruote. In quest'ultimo caso la somma puntata viene distribuita in proporzione alle ruote scelte: giocare 30 € su tutte le dieci ruote è come eseguire dieci giocate da 3 € su ciascuna ruota; giocare 30 € su "Napoli, Genova e Palermo" è come eseguire tre giocate da 10 € sulle ruote delle tre città. Possiamo quindi limitarci a considerare la singola ruota. Cominciamo a rispondere alle seguenti domande:

a) Quante sono le possibili cinquine estratte?
b) Quante sono le cinquine contenenti un numero fissato?
c) Quante sono le cinquine contenenti un ambo fissato?
d) Quante sono le cinquine contenenti un terno fissato?
e) Quante sono le cinquine contenenti una data quaterna?

a) Dato che non importa l'ordine dei numeri estratti, le possibili cinquine sono le combinazioni dei 90 numeri a cinque a cinque $C_{90,5} = \frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$ = 43.949.268.

b) Le cinquine contenenti un numero dato si ottengono accostando quattro dei rimanenti 89 numeri al numero dato, e quindi sono tante quante le combinazioni di 89 elementi a quattro a quattro $C_{89,4} = \frac{89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$ = 2.441.626.

c) Le cinquine contenenti un dato ambo si ottengono accostando tre dei rimanenti 88 numeri ai due numeri dati, e quindi sono $C_{88,3} = \frac{88 \cdot 87 \cdot 86}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 109.736$.

d) Analogamente, le cinquine contenenti un dato terno sono $C_{87,2} = \frac{87 \cdot 86}{2 \cdot 1} = 3.741$.

e) Le cinquine contenenti una data quaterna sono evidentemente 86.

Supponiamo ora che un giocatore punti la somma P sull'uscita di un dato numero. La probabilità che il numero esca è evidentemente $\frac{5}{90} = \frac{1}{18}$ (ed è anche il rapporto tra il numero delle cinquine che contengono il dato numero, cioè $C_{89,4}$, e quello di tutte le cinquine, cioè $C_{90,5}$).

Se il gioco fosse equo, in caso di uscita del numero giocato, il giocatore dovrebbe ricevere la somma S tale che: $S \cdot \frac{1}{18} = P$, da cui $S = 18P$. In realtà lo Stato paga $11{,}232P$, per cui il gioco non è equo. Mediamente, su 18 giocate di questo tipo, lo Stato incassa $18P$ e paga $11{,}232P$ all'unico giocatore su 18 che vince. Può quindi contare su un utile di $6{,}768P$, pari al $\frac{6{,}768}{18} \cong$ 37,6% delle giocate.

Supponiamo ora che il giocatore punti la somma P sull'uscita di un dato ambo giocando due numeri[2]. La probabilità di vincita è il rapporto tra il numero dei casi favorevoli, ossia le $C_{88,3}$ cinquine che contengono il dato ambo, e il numero $C_{90,5}$ di tutte le possibili cinquine, cioè, per quanto visto in precedenza, $\frac{109.736}{43.949.268} \cong 0{,}025$. Si può comunque calcolare tale rapporto eseguendo prima le semplificazioni:

$$\frac{C_{88,3}}{C_{90,5}} = \frac{88 \cdot 87 \cdot 86}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86} = \frac{20}{90 \cdot 89} = \frac{1}{400{,}5} \cong 0{,}025.$$

Se il gioco fosse equo, lo Stato dovrebbe pagare a chi vince la somma di $400{,}5P$; in realtà paga $250P$ e quindi può contare su un utile di circa il 37,6% delle giocate.

Così la probabilità che esca un terno è $\frac{C_{87,2}}{C_{90,5}} = \frac{3.741}{43.949.268} \cong 0{,}00008512$, per cui se il gioco fosse equo lo Stato dovrebbe pagare a chi azzecca un terno giocando tre numeri la somma $11.748P$; in realtà paga $4.250P$, con un utile di circa il 64% delle giocate.

Infine, lo Stato paga $80.000P$ e $1.000.000P$ per la quaterna e per la cinquina rispettivamente, e il suo utile raggiunge l'84% e il 98% delle giocate.

***Osservazione**. Sui numeri in ritardo*. Sotto la spinta dei mass media è invalso l'uso da parte di molti giocatori di puntare sui "numeri in ritardo": se un numero non viene estratto su una certa ruota da molte settimane, su di esso si concentrano le puntate dei giocatori. È sensato un simile modo di agire?

Basta un attimo di riflessione per capire che tale strategia non ha alcun fondamento razionale. Ad ogni estrazione la probabilità di uscita di un numero è sempre 1/18, anche se quel numero non esce da parecchie settimane.

L'equivoco sorge dal fatto che l'evento "un numero dato non uscirà nelle prossime n estrazioni" ha probabilità che diviene sempre più piccola al crescere di n.

[2] Se il giocatore punta la somma P sull'ambo giocando tre numeri, ad esempio 34 - 47 - 88, è come se giocasse $P/3$ su ciascuno dei tre ambi possibili, ossia 34 - 47, 34 - 88, 47 - 88. Se il giocatore punta la somma P sull'ambo giocando quattro numeri, è come se giocasse $P/6$ su ciascuno dei sei ambi possibili, e così via.

Infatti, la probabilità che un numero non sia estratto nella prossima estrazione è $\frac{17}{18}$, che non sia estratto nelle prossime due estrazioni è, per il teorema della probabilità composta, $\left(\frac{17}{18}\right)^2$ e, in generale, che non sia estratto nelle prossime n estrazioni è $\left(\frac{17}{18}\right)^n$. Dato che, per $n = 12$, $\left(\frac{17}{18}\right)^{12} \cong 0{,}5036$ e, per $n = 13$, $\left(\frac{17}{18}\right)^{13} \cong 0{,}4756$, si può concludere che la probabilità che il numero esca nelle prossime 13 estrazioni è maggiore di quella che non esca. Se si prendono in esame sequenze più lunghe di estrazioni, la probabilità che il numero esca diviene molto elevata: ad esempio, la probabilità che il numero esca nelle prossime 50 estrazioni è circa 0,943, che esca nelle prossime 100 è circa 0,9967.
Quando un numero è "in ritardo" da 100 estrazioni, significa che si è verificato un evento a bassa probabilità, pari a 0,0033. Ciò però non vuole affatto dire che alla centounesima estrazione l'uscita di quel numero sia più probabile di 1/18: "la ruota non ha memoria", ad ogni estrazione i numeri sono tutti equiprobabili e il passato non conta. Se il numero non è uscito in 100 estrazioni, questo ormai è un fatto: un conto è dire "un numero non esce in 101 estrazioni" (la probabilità è circa 0,0031) e ben altro dire "un numero non esce in 101 estrazioni, sapendo che non è uscito nelle prime 100" (la probabilità è $\frac{17}{18} \cong 0{,}9444$).

E quelli che hanno vinto grosse somme con tale tattica? La realtà è che la loro vincita è dovuta alla loro perseveranza nel giocare (e alla possibilità economica di sostenerla) e non al numero prescelto. La probabilità è la stessa anche si cambia il numero ad ogni estrazione!