IDENTITÀ, EQUAZIONI E LOGICA

Dario PALLADINO

Università di GENOVA

1. Premessa

Le equazioni e le identità algebriche sono antiche quanto la matematica. Esse figurano già nelle tavolette di argilla risalenti alla civiltà assiro-babilonese (dinastia di Hammurabi, XVI-XVIII sec. a.C.), nei papiri egizi e nella matematica greca (in cui venivano trattate come problemi e proprietà geometriche) e hanno accompagnato fino ai giorni nostri lo sviluppo della matematica. Tuttavia ancora oggi, come abbiamo recentemente constatato in una serie di interventi nella mailing-list "Cabrinews", molti insegnanti si trovano perplessi quando devono introdurre l'argomento a lezione nel primo biennio delle scuole superiori poiché la definizione presente in molti testi ("Un'equazione è un'uguaglianza verificata soltanto da alcuni numeri; se è verificata da tutti, allora è un'identità") si scontra con quanto può avvenire nella pratica in cui si parte da un'equazione e si arriva a un'identità o a una uguaglianza vera o falsa fra numeri. Senza entrare nei particolari del dibattito, in cui sono emerse varie posizioni contrastanti e domande di varia natura (ad esempio: "3 = 4 è o no un'equazione?", "Per le equazioni ha senso chiedersi se sono vere o false?"), l'innegabile differenza tra identità ed equazioni viene da alcuni attribuita alla "intenzione" di chi l'ha scritta, o a diversi significati del simbolo "=". Riflettendo su questo argomento ci è parso che, sfruttando alcuni concetti della logica, si possano sistemare le cose in modo rigoroso senza far intervenire aspetti non abituali in matematica, quali le predisposizioni del soggetto o ambiguità notazionali. In tempi recenti la matematica sta subendo numerosi "attacchi" che vogliono annullare, o perlomeno ridimensionare, le sue caratteristiche peculiari, quelle che la differenziano dalle altre scienze e ci sembra che quanto è stato lentamente e faticosamente appurato, ossia la natura logica della giustificazione in matematica, non sia sufficientemente entrato nella cultura degli stessi addetti ai lavori, probabilmente perché la diffusione della logica è ancora piuttosto scarsa. Per questo motivo nel prossimo paragrafo, a beneficio di coloro che non hanno conoscenze dell'argomento, richiameremo gli elementi di logica che utilizzeremo nel seguito e coglieremo l'occasione per far emergere il ruolo pervasivo della logica nello sviluppo di tutti i settori della matematica, anche dell'algebra che, data la sua natura algoritmica, presenta procedimenti apparentemente molto diversi da quelli della geometria. Torneremo brevemente sugli aspetti didattici in sede conclusiva.

2. Preliminari di logica e identità

La quasi totalità delle dimostrazioni e dei procedimenti della matematica sono formalizzabili con il linguaggio della *logica dei predicati del primo ordine con identità*, il calcolo logico abitualmente insegnato nei corsi universitari di Logica (o di Logica matematica). Quando si insegna logica la trattazione viene volutamente mantenuta ad un livello linguistico molto generale, poiché, per sua natura, l'indagine logica, avendo natura *formale*, non si riferisce ad alcun ambito specifico e le sue leggi e le sue regole valgono, come si usa dire, "in ogni dominio e per ogni interpretazione". Va tenuto allora presente che le formule abitualmente impiegate nella pratica matematica *non* sono formule della logica dei predicati: esse sono formule interpretate che conservano la "forma logica" delle corrispondenti formule della logica dei predicati, e quindi risultano vere o false se sono *chiuse*, ossia non contengono variabili libere (le eventuali variabili individuali, usualmente indicate con x, y, z..., sono tutte sottoposte all'azione di uno dei due quantificatori, il quantificatore universale o il quantificatore esistenziale), mentre non possono, in generale, essere dichiarate vere o false se sono *aperte*, ossia se contengono variabili libere.

Per fare un esempio adatto per il contesto che intendiamo esaminare, quando scriviamo l'uguaglianza $2x + 1 = x + 3$, 1, 2 e 3 sono (nomi di) numeri, + è l'addizione e con $2x$ intendiamo il prodotto di 2 e x, e, poiché essa contiene libera la variabile x, non può essere dichiarata né vera, né falsa. In un corso di logica, essa è una delle possibili interpretazioni nel dominio dei numeri[1] della formula logica $f(g(a, x), b) = f(x, c)$, ossia quella che si ottiene quando si interpretano le costanti individuali a, b, c rispettivamente nei numeri 2, 1, 3 e le costanti funzionali f e g nell'addizione e nella moltiplicazione. In logica, espressioni quali $f(g(a, x), b)$, $f(x, c)$, $g(a, x)$ sono dette *termini* e, nel caso specifico, *termini aperti* poiché contengono la variabile x. Sono invece *termini chiusi* quelli che non contengono variabili, quali ad esempio a, b, $g(a, b)$, $f(b, c)$. A questi ultimi, nell'interpretazione precedente, è associato un ben preciso numero, rispettivamente 2, 1, $2 \cdot 1$ ossia 2 e $1 + 3$, ossia 4. Pertanto, in base a una interpretazione, un'uguaglianza fra due termini chiusi risulta vera o falsa, mentre un'uguaglianza fra due termini di cui almeno uno aperto non può dirsi né vera, né falsa. Sempre nell'esempio, l'interpretazione di $g(a, b) = a$ è $2 \cdot 1 = 2$, e quindi è vera, mentre quella di $f(b, c) = a$ è $1 + 3 = 2$ e quindi è falsa.

Pertanto, non ci pare opportuno attribuire alle uguaglianze numeriche (fra termini chiusi) la qualifica di "identità" o di "equazioni"[2] in quanto esse sono o vere o false e non ha senso porsi domande se non quella di verificare quale delle due circostanze si verifica. Assumiamo come formule base per costruire identità ed equazioni le formule interpretate nei numeri che hanno la forma di una uguaglianza fra due termini di cui almeno uno aperto, e poiché in esse deve comparire almeno una variabile, continuiamo ad usare, come è consuetudine, la lettera x e possiamo limitare le nostre considerazioni al caso di una sola variabile (non sorgono particolari problemi concettuali a estenderle al caso di più variabili). Consideriamo allora formule del tipo $A(x) = B(x)$ in cui x figura in almeno uno dei

[1] Non intendiamo in questa sede entrare in particolari magari importanti dal punto di vista matematico, ma inessenziali ai nostri fini. Scegliamo come ambito in cui sviluppare le nostre considerazioni l'insieme **R** dei numeri reali e la sua struttura algebrica di campo ordinato.

[2] In realtà in logica abitualmente si dicono identità tutte le formule del tipo $t = t'$ con t, t' termini qualsiasi. Questo impiego molto generale del termine "identità" non è in sintonia con l'uso in algebra in cui le identità devono essere, in un senso che preciseremo fra breve, sempre vere, e quindi sono in ogni caso una parte ristretta delle formule del tipo $t = t'$.

due membri. Dato che, come si è detto, tali formule sono interpretate, a ciascuna di esse resta associato il sottoinsieme del dominio costituito dagli elementi che, sostituiti a x, le rendono uguaglianze vere. Ci pare non sorga alcuna questione se si afferma che le *identita algebriche* sono le formule per le quali tale sottoinsieme è l'intero dominio[3].

È allora del tutto naturale affermare che $A(x) = B(x)$ è una ***identità*** se e solo se è vera la formula chiusa $\forall x(A(x) = B(x))$ ottenuta anteponendo il *quantificatore universale*. Pertanto, *verificare* una identità significa dimostrare la proposizione chiusa $\forall x(A(x) = B(x))$. Volendo, si può anche dire che è una ***identità*** una formula vera del tipo $\forall x(A(x) = B(x))$ (scrivendo esplicitamente il quantificatore universale) o anche, con la notazione insiemistica, che $\{x \in \mathbf{R}: A(x) = B(x)\}$[4] $= \mathbf{R}$. Prima di passare alle equazioni vediamo un esempio di verifica di un'identità con lo scopo di evidenziare la natura logica delle dimostrazioni matematiche: anche i passaggi algebrici (e i calcoli aritmetici) sono dimostrazioni al pari di quelle della geometria.

3. Verifica di una identità

Una semplice identità è ad esempio $(x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$
Esaminiamo nei particolari i passaggi della sua dimostrazione per vedere quali proprietà intervengono.

$(x + 2)^2 = (x + 2) \cdot (x + 2)$
definizione di elevamento al quadrato

$(x + 2) \cdot (x + 2) = (x + 2) \cdot x + (x + 2) \cdot 2$
per la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione; in formula: $\forall x \forall y \forall z\ (x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z)$

$(x + 2) \cdot x + (x + 2) \cdot 2 = (x \cdot x + 2 \cdot x) + (x \cdot 2 + 2 \cdot 2)$
sempre per la proprietà distributiva: $\forall x \forall y \forall z((y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x)$

$(x \cdot x + 2 \cdot x) + (x \cdot 2 + 2 \cdot 2) = (x^2 + 2x) + (2x + 4)$
ponendo $x \cdot x = x^2$ (definizione di elevamento al quadrato), $x \cdot 2 = 2x$ (proprietà commutativa della moltiplicazione) e $2 \cdot 2 = 4$

$(x^2 + 2x) + (2x + 4) = ((x^2 + 2x) + 2x) + 4$
per la proprietà associativa dell'addizione:
$\forall x \forall y \forall z((x + y) + z = x + (y + z))$

$((x^2 + 2x) + 2x) + 4 = (x^2 + (2x + 2x)) + 4$

[3] Come si è detto, per non appesantire la trattazione, non ci occupiamo del caso abbastanza frequente in cui le identità valgono sotto ipotesi particolari, ossia hanno ad esempio la forma: $\forall x(C(x) \rightarrow A(x) = B(x))$.

[4] Si noti che nella scrittura $\{x \in \mathbf{R}: A(x) = B(x)\}$ la variabile individuale x è vincolata: $\{x \in \mathbf{R}: A(x) = B(x)\}$ è un termine chiuso e infatti denota un ben preciso insieme.

sempre per la proprietà associativa

$x^2 + (2x + 2x) + 4 = x^2 + 4x + 4$

in quanto per la proprietà distributiva $2x + 2x = (2 + 2)x = 4x$

Per la proprietà transitiva dell'uguaglianza si può uguagliare il termine iniziale con quello finale e si ha:

$$(x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4,$$

da cui:

$$\forall x((x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4)$$

per la regola logica di introduzione del quantificatore universale.

Questi passaggi evidenziano l'intervento di alcune proprietà dell'addizione e della moltiplicazione (proprietà distributiva, commutativa, associativa) e servono a chiarire che la verità della formula $\forall x((x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4)$ dipende dalle proprietà del dominio dei numeri in cui stiamo agendo[5].

Nella dimostrazione sono intervenute le proprietà logiche dell'identità (ad esempio la proprietà transitiva) e, in particolare, abbiamo applicato tre volte la regola logica detta di *sostituibilità degli identici* quando abbiamo sostituito $x \cdot x$ con x^2, $x \cdot 2$ con $2x$ e $2 \cdot 2$ con 4 nella formula $(x \cdot x + 2 \cdot x) + (x \cdot 2 + 2 \cdot 2)$ sfruttando le tre uguaglianze $x \cdot x = x^2$, $x \cdot 2 = 2x$ e $2 \cdot 2 = 4$.

Il procedimento di sostituzione è così abituale che quasi non ci si accorge di usarlo. Soffermiamoci su di esso ancora un attimo. In precedenza abbiamo scritto $2x + 2x = (2 + 2)x = 4x$. La giustificazione logica di questi passaggi è la seguente. Per la proprietà distributiva si può scrivere:

$$\forall x \forall y \forall z(y \cdot x + z \cdot x = (y + z) \cdot x)$$

Si applica tre volte la regola di eliminazione del quantificatore universale eliminando prima $\forall x$ e poi $\forall y$ e $\forall z$ sostituendo y e z con 2:

$$2 \cdot x + 2 \cdot x = (2 + 2) \cdot x.$$

Dall'uguaglianza $2 + 2 = 4$ si ottiene:

$$2 \cdot x + 2 \cdot x = 4 \cdot x \quad \text{(ossia } 2x + 2x = 4x\text{)}$$

per la regola di sostituibilità degli identici.

Analogamente, quando si passa da $x^2 + (2x + 2x) + 4$ a $x^2 + 4x + 4$, si applica di nuovo la regola di sostituibilità degli identici, sfruttando l'uguaglianza $2x + 2x = 4x$ appena dimostrata. Potremmo continuare l'analisi della nostra

[5] La (piuttosto complessa) formula della logica dei predicati di cui essa è una interpretazione, ossia $\forall x(f(g(x, a)) = g(g(f(x), h(b, x)), b)$, è vera se si interpretano f nell'elevamento al quadrato, g nell'addizione, h nella moltiplicazione, a in 2 e b in 4.

dimostrazione per evidenziare come in essa intervengano altre regole logiche, ma ai nostri fini non è affatto necessario. Lo scopo è solo quello di far vedere che in ogni dimostrazione matematica intervengono proposizioni che esprimono proprietà assunte nella teoria nell'ambito della quale si sta svolgendo la dimostrazione e regole logiche, le quali sono applicabili in qualsiasi teoria.

4. Equazioni

Come la caratterizzazione delle identità avviene con l'applicazione del quantificatore universale, così la caratterizzazione delle equazioni può avvenire mediante l'applicazione del *quantificatore esistenziale*.

Che cosa si intende, ad esempio, con "Risolvere l'equazione $2x + 1 = x + 3$"?. Si tratta di stabilire se esistono dei numeri che sostituiti a x la rendono una uguaglianza vera e, in caso affermativo, di determinarli[6]. Si tratta quindi, in primo luogo, di vedere se è vera la formula chiusa $\exists x(2x + 1 = x + 3)$. In generale, chiedersi se è vera la formula chiusa $\exists x(A(x) = B(x))$ significa porsi la domanda se l'insieme dei numeri che, sostituiti a x, rendono vera l'uguaglianza $A(x) = B(x)$ è o non è vuoto. Nel primo caso, ossia se è vera $\neg\exists x(A(x) = B(x))$, l'equazione è (a) *impossibile*, nel secondo *ammette soluzione*. In questo secondo caso, se il numero di soluzioni è finito, l'equazione è (b) *determinata*, altrimenti è (c) *indeterminata*. Per determinare quale delle tre possibilità si verifica, si eseguono dei passaggi analoghi a quelli svolti nel §3, mediante i quali si dimostra che la formula $A(x) = B(x)$ è equivalente a una più semplice. I tre casi corrispondono all'essere (a) vuoto, (b) non vuoto e finito, (c) l'intero **R** l'insieme $\{x \in \mathbf{R}: A(x) = B(x)\}$

- Nel caso di $2x + 1 = x + 3$ si perviene alla formula $x = 2$.[7] In altri termini si dimostra che è vera la proposizione:

$$\forall x(2x + 1 = x + 3 \leftrightarrow x = 2)^8$$

In base alla legge logica $\forall x(A(x) \leftrightarrow B(x)) \rightarrow (\exists x A(x) \leftrightarrow \exists x B(x))$, da:

$$\forall x(2x + 1 = x + 3 \leftrightarrow x = 2)$$

segue:

$$\exists x(2x + 1 = x + 3) \leftrightarrow \exists x(x = 2)$$

La proposizione $\exists x(x = 2)$ è vera ed è evidentemente verificata solo dal numero 2. In logica, infatti, le formule del tipo $\exists x(x = a)$ sono *valide*, ossia vere in ogni

[6] È naturale in matematica, quando si pone un problema, prima vedere se esso ammette soluzioni e poi, in caso affermativo, cercare di determinarle.

[7] Abbiamo deciso di proporre esempi particolarmente semplici per concentrare l'attenzione sulla *forma logica* delle proposizioni coinvolte.

[8] Nella dimostrazione si applicano i cosiddetti "principi di equivalenza". La qualifica di "principi" può indurre in fraintendimenti. Non si tratta infatti né di proposizioni assunte come assiomi relativi ai numeri, né di leggi logiche, ma di teoremi relativi al bicondizionale che si dimostrano con un procedimento simile a quello con cui, nel paragrafo 3, abbiamo verificato una identità: uno di tali principi è, ad esempio, $\forall x(A(x) = B(x) \leftrightarrow A(x) + C(x) = B(x) + C(x))$.

dominio e in ogni interpretazione. L'equivalenza dimostrata stabilisce sia che l'equazione non è impossibile, sia che è determinata con unica soluzione 2, ossia che $\{x \in \mathbf{R}: 2x + 1 = x + 3\} = \{2\}$.

- Analogamente, se si considera l'uguaglianza $x^2 - 5x = 0$, si perviene a dimostrare che è vera la proposizione:

$$\forall x(x^2 - 5x = 0 \leftrightarrow x = 0 \lor x = 5)$$

e quindi si perviene a:

$$\exists x(x^2 - 5x = 0) \leftrightarrow \exists x(x = 0 \lor x = 5)$$

e nuovamente l'equazione non è impossibile, ed è determinata con soluzioni 0 e 5 (il secondo membro è vero e la formula $x = 0 \lor x = 5$ è vera solo quando a x si sostituisce il numero 0 o il numero 5). Quindi $\{x \in \mathbf{R}: x^2 - 5x = 0\} = \{0, 5\}$.

- Se si considera l'uguaglianza $2x + 1 = 2x + 3$, si perviene a dimostrare che è vera la proposizione:

$$\forall x(2x + 1 = 2x + 3 \leftrightarrow 1 = 3)$$

Dato che $1 = 3$ è falsa, ossia vale $1 \neq 3$ ($\neg 1 = 3$), da questa formula segue logicamente:

$$\forall x \neg(2x + 1 = 2x + 3)$$

che è logicamente equivalente a:

$$\neg\exists x(2x + 1 = 2x + 3)$$

e quindi l'equazione $2x + 1 = 2x + 3$ è impossibile.
Si può anche scrivere: $\{x \in \mathbf{R}: 2x + 1 = 2x + 3\} = \varnothing$.

- Se si considera l'uguaglianza $2x + 3 = 2x + 3$, si perviene a dimostrare che è vera la proposizione:

$$\forall x(2x + 3 = 2x + 3 \leftrightarrow 3 = 3)$$

Dato che $3 = 3$ è vera, da questa formula segue logicamente:

$$\forall x(2x + 3 = 2x + 3)$$

e quindi $2x + 3 = 2x + 3$ è un'identità.

Dalla legge logica:

$$\forall x A(x) \to \exists x A(x) \quad (*)$$

segue che è vera anche $\exists x(2x + 3 = 2x + 3)$.
Pertanto: l'equazione $2x + 3 = 2x + 3$ non è impossibile, ed è indeterminata poiché, essendo vera $\forall x(2x + 3 = 2x + 3)$, tutti i numeri sono sue soluzioni. In termini insiemistici: $\{x \in \mathbf{R}: 2x + 3 = 2x + 3\} = \mathbf{R}$.

In definitiva, la differenza fra identità ed equazioni consiste nel fatto che nelle prime interviene il quantificatore universale e nelle seconde il quantificatore esistenziale e il loro rapporto è determinato dalla legge logica (*). Prima di trarre qualche conclusione di natura didattica, chiariamo anche il ruolo dei *parametri* nella risoluzione delle equazioni.

5. Equazioni parametriche

Strettamente connessa con quanto finora esposto è la risoluzione delle equazioni parametriche. Nell'uguaglianza $A(x) = B(x)$ può figurare un'altra variabile, ed usiamo ad esempio a, e il problema è la risoluzione dell'equazione "al variare del parametro a". In tal caso, accanto al quantificatore esistenziale, interviene anche il quantificatore universale. Vediamo in che modo attraverso un esempio. Quando si dice: "risolvere l'equazione parametrica $ax + 1 = a$", abitualmente si sottintende che la variabile x è l'incognita e la variabile a è il parametro e quindi che ci si interrroga sulla verità della proposizione:

$$\forall a \exists x (ax + 1 = a)$$[9]

Ciò che si ottiene con gli abituali passaggi è che è vera la proposizione:

$$\forall a \forall x \left(ax + 1 = a \leftrightarrow \neg a = 0 \wedge x = \frac{a-1}{a} \right)$$

Da questa seguono logicamente sia:

$$\forall a \left(a = 0 \rightarrow \neg \exists x (ax + 1 = a) \right)$$

che:

$$\forall a \left(\neg a = 0 \rightarrow \left(\exists x (ax + 1 = a) \leftrightarrow \exists x \left(x = \frac{a-1}{a} \right) \right) \right)$$

ossia, traducendo nel linguaggio abituale, se $a = 0$, l'equazione è impossibile, e, se $a \neq 0$, l'equazione è determinata e ha soluzione $x = \frac{a-1}{a}$.

Nulla vieta di considerare a come incognita e x come parametro, e quindi la proposizione:

$$\forall x \exists a (ax + 1 = a).$$

Dopo gli abituali passaggi si ottiene allora sia:

$\forall x \left(x = 1 \rightarrow \neg \exists a (ax + 1 = a) \right)$ ovvero, se $x = 1$, l'equazione è impossibile)

[9] In logica con le lettere *a*, *b*, *c* si indicano, come già visto nella prima parte del §2, le *costanti individuali* e non le variabili e le costanti individuali non possono essere indice di un quantificatore. In algebra le costanti individuali sono i (nomi dei) numeri e tutte le lettere sono variabili individuali.

che:

$$\forall x\left(\neg x = 1 \rightarrow \left(\exists a(ax + 1 = a) \leftrightarrow \exists a\left(a = \frac{1}{1-x}\right)\right)\right)$$

ovvero, se $x \neq 1$, l'equazione è determinata e ha soluzione $\frac{1}{1-x}$.

6. Conclusioni

Le considerazioni finora esposte sono evidentemente troppo sofisticate per essere trattate nel primo biennio della scuola superiore e, soprattutto, sarebbe del tutto inopportuno complicare le formule dell'algebra come abbiamo fatto nei paragrafi precedenti. Ci sembra invece utile abituare gli alunni all'uso dei due quantificatori e introdurre la distinzione tra formule aperte e chiuse. Quando si considerano le formule $(x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$; $2x + 1 = x + 3$; $2x + 1 = 2x + 3$, $ax + 1 = a$, e così via, è opportuno chiamarle *proposizioni* (*formule*) *aperte* e sottolineare che non sono né vere, né false.

Molto spesso, esprimendo le proposizioni matematiche, si lasciano sottintesi i quantificatori. Sarebbe invece opportuno abituarsi a scriverli sempre, magari senza simbolizzarli (ossia scrivendo "per ogni" e "esiste"). In ogni caso non conviene mai sottintendere il quantificatore esistenziale e va fatto notare esplicitamente che, di solito, quando si chiede se è vera o falsa una proposizione aperta, in realtà si sta chiedendo se è vera o falsa la sua chiusura universale. Ad esempio, se si chiede se vale la proprietà commutativa della moltiplicazione e si scrive $x \cdot y = y \cdot x$, si vuol sapere se è vera la proposizione $\forall x \forall y(x \cdot y = y \cdot x)$. La risposta è affermativa nei domini numerici, ma è falsa se stiamo parlando di vettori e "$\cdot$" si interpreta sul prodotto vettoriale o se stiamo parlando di matrici quadrate dello stesso ordine e "$\cdot$" indica il prodotto righe per colonne.

Ribadiamo quindi che, quando si afferma che $(x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$ è un'identità, si intende che è vera la proposizione $\forall x((x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4)$ ossia che sono vere tutte le uguaglianze che si ottengono sostituendo x con un numero. Ci sembra preferibile evitare di dire che $(x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$ è un'identità perché è *sempre* vera, se non si specifica che il *sempre* significa "per ogni numero". Riteniamo opportuno riservare la qualifica di *sempre vere* alle leggi della logica (che sono vere in qualsiasi dominio e per qualsiasi interpretazione). Come si è visto nel §3, la formula $\forall x((x + 4)^2 = x^2 + 4x + 4)$ non è una *verità logica* poiché la sua verità dipende dalle proprietà delle operazioni e dei numeri[10].

[10] Come segnalato nella nota 5, la formula algebrica è una delle possibili interpretazioni della formula $\forall x(f(g(x, a)) = g(g(f(x), h(b, x)), b)$ della logica dei predicati, ed è immediato trovare delle interpretazioni di tale formula che la rendano falsa. Si può ad esempio continuare ad interpretare f, g e h nell'elevamento al quadrato, nell'addizione e nella moltiplicazione, e interpretare a in 1 e b in 5: non è vero che $\forall x((x^2 + 1) = x^2 + 5x + 5)$

Quando invece si parla di equazioni, come abbiamo argomentato nel §4, bisogna evidenziare che la verità o la falsità si riferisce alla formula quantificata esistenzialmente.

A nostro avviso si può benissimo dire che $(x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$ è una equazione, intendendo che ci si chiede se è vera $\exists x((x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4)$. Nel momento in cui si scopre che è vera $\forall x((x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4)$, ne segue logicamente che è vera anche $\exists x((x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4)$ e che l'equazione è indeterminata.

In definitiva, se l'insegnante ha presente il ruolo che i quantificatori rivestono nella forma logica delle proposizioni, non ha difficoltà a rispondere alle domande che qualche allievo può sollevare circa le differenze fra identità ed equazioni senza addentrarsi nella complessa analisi logica dei "passaggi" algebrici, che possono essere svolti come si è sempre fatto nella pratica. Basta chiarire che il "vero" e il "falso" si attribuiscono solo alle formule chiuse, che le uguaglianze numeriche (fra termini chiusi) non sono né identità algebriche, né equazioni algebriche e che sono tali solo le formule contenenti una variabile x. Quella che nella premessa abbiamo chiamato l'"intenzione" del soggetto non ci sembra altro che la scelta del quantificatore logico, che non va lasciata sottintesa. Inoltre, l'uguale dei calcoli algebrici non è affatto ambiguo, ma è l'identità tra numeri che è la relazione logica formalizzata nel calcolo dei predicati con identità.