LE GEOMETRIE NON EUCLIDEE FRA CULTURA, STORIA E DIDATTICA DELLA MATEMATICA

Dario Palladino
(Università di Genova)

Prima parte
La geometria di Euclide e la questione delle rette parallele

Premessa

La scoperta e la diffusione delle geometrie non euclidee sono senza dubbio da annoverare fra gli eventi che hanno maggiormente influenzato lo sviluppo della matematica nel diciannovesimo secolo. Entrare nel merito dei loro contenuti appare opportuno non solo dal punto di vista strettamente matematico, ma anche per le ripercussioni che hanno avuto sia sulla concezione delle teorie fisiche, sia sulla riflessione filosofica e scientifica in generale. Si può tranquillamente affermare che ogni persona colta dovrebbe sapere, almeno a grandi linee, che cosa sono e quali influenze hanno avuto nello sviluppo della matematica e del pensiero scientifico. Tale conoscenza non richiede particolari approfondimenti matematici e può essere raggiunta con strumenti tecnici alla portata degli studenti liceali.

Nostro costante punto di riferimento sarà il volume E. Agazzi, D. Palladino, *Le geometrie non euclidee e i fondamenti della geometria dal punto di vista elementare* (La Scuola, Brescia, 1998). In questo primo intervento ci occuperemo dell'assiomatica classica, degli *Elementi* di Euclide e delle peculiarità del V postulato euclideo.

L'assiomatica classica

Ricordiamo in primo luogo che una teoria matematica modernamente intesa è un sistema ipotetico-deduttivo che si basa su un insieme di concetti non definiti, detti *concetti primitivi*, e un insieme di proposizioni primitive, dette *assiomi*, accettate senza che ne venga data una dimostrazione. Tutte gli altri concetti della teoria devono essere introdotti mediante *definizioni* e tutte le altre proposizioni della teoria, dette *teoremi*, devono essere ottenute mediante *dimostrazioni* nelle quali si assumono come ipotesi solo assiomi o proposizioni già precedentemente dimostrate.

La necessità di assumere concetti primitivi e assiomi deriva dal fatto che sia le definizioni sia le dimostrazioni hanno un carattere "relazionale": in una definizione un *concetto nuovo* viene definito a partire da *altri* il cui significato è assunto come già noto e una dimostrazione mostra come una *conclusione* deriva logicamente da *altre* proposizioni assunte come ipotesi. Se si vogliono evitare circolarità o regressi all'infinito, occorre stabilire i punti di partenza, ossia i concetti primitivi e gli assiomi, da cui iniziare i processi definitorio e dimostrativo.

A proposito degli assiomi, si era soliti suddividere le proposizioni primitive in due gruppi: i *postulati* e le *nozioni comuni* (o anche semplicemente *assiomi*); i postulati enunciavano le proprietà evidenti degli oggetti della teoria (e oggi sono detti *assiomi specifici*); le nozioni comuni stabilivano proprietà di carattere generale, vere per qualsiasi ambito oggettuale e non solo per quello specifico della teoria (e corrispondono, almeno approssimativamente, a quelli oggi detti *assiomi logici*).

Quanto sinora esposto del metodo assiomatico è comune sia alla concezione classica, sia a quella moderna. Ciò che caratterizza ulteriormente la prima è che in essa il procedimento dimostrativo è inteso come metodo per mostrare la *verità* delle proposizioni. I filosofi greci avevano distinto l'opinione che, basandosi sull'evidenza dei sensi, può essere fallace e la verità basata sul ragionamento intellettuale; avevano cercato quindi i criteri per stabilire la demarcazione tra l'opinione (*dóxa*), la cui verità è contingente e instabile, e l'autentico sapere (*epistéme*), la cui verità, necessaria e indubitabile, è garantita da processi razionalmente fondati. Questa impostazione ha due importanti conseguenze nell'organizzazione classica del sapere scientifico: (1) per essere veritativo il discorso scientifico deve possedere un preciso contenuto oggettuale (solo a proposito di determinati oggetti si può dire che una proposizione è vera); (2) gli assiomi, assunti senza dimostrazione, essendo i "garanti" della verità delle proposizioni dell'intera teoria, devono essere "veri di per sé": la loro verità deve essere intellettualmente garantita al di là di ogni ragionevole dubbio.

Non entriamo in ulteriori dettagli di questa caratterizzazione della concezione classica dell'assiomatica, alla quale si fa spesso riferimento come alla *concezione aristotelica*, dato che quanto esposto è sufficiente per introdurci all'esame della sistemazione euclidea della geometria.

Gli *Elementi* di Euclide

Come è noto, gli *Elementi* di Euclide (scritti probabilmente intorno al 300 a.C.) costituiscono il primo vero proprio trattato di matematica che ci sia pervenuto: esso compendia e organizza assiomaticamente i risultati matematici (geometrici, aritmetici e algebrici) dei tre secoli precedenti. Qui siamo interessati al primo dei tredici libri in cui l'opera è suddivisa: esso si conclude con la dimostrazione del teorema di Pitagora (Proposizione 47: «Nei triangoli rettangoli il quadrato del lato opposto all'angolo retto è uguale alla somma dei quadrati dei lati che comprendono l'angolo retto»[1]) e del suo inverso (Proposizione 48: «Se in un triangolo il quadrato di uno dei lati è uguale alla somma dei quadrati dei rimanenti due lati del triangolo, l'angolo che è compreso dai due rimanenti lati del triangolo è retto»). All'inizio del primo libro dell'opera sono enunciate le proposizioni primitive, divise in tre gruppi: *termini*, *postulati* e *nozioni comuni.*

Il primo gruppo (*termini*), contiene le definizioni dei concetti geometrici. Esse possono essere distinte in due tipi. Nelle *definizioni nominali* un concetto nuovo viene definito in funzione di concetti già definiti; ad esempio:

[1] Per gli enunciati delle proposizioni euclidee si veda Euclide, *Elementi*, trad. e commento a cura di A. Frajese e L. Maccioni, UTET, Torino, 1970.

«X. Quando una retta innalzata su un’altra retta forma gli angoli adiacenti uguali fra loro, ciascuno dei due angoli uguali è retto, e la retta innalzata si chiama perpendicolare a quella su cui è innalzata.

XI. Angolo ottuso è quello maggiore di un retto.

XXIII. Parallele sono quelle rette che, essendo nello stesso piano e venendo prolungate illimitatamente dall’una e dall’altra parte[2], non s’incontrano fra loro da nessuna delle due parti».

Altri termini, detti talvolta *definizioni reali*, hanno lo scopo di caratterizzare, almeno intuitivamente e per quanto possibile, l’universo oggettuale della geometria; ad esempio:

«I. Punto è ciò che non ha parti.

IV. Linea retta è quella che giace ugualmente rispetto ai suoi punti.

VIII. Angolo piano è l’inclinazione reciproca di due linee su un piano, le quali si incontrino fra loro e non siano in linea retta».

I termini di questo tipo non sono vere e proprie definizioni, in quanto il concetto nuovo non viene definito mediante concetti già definiti (non è stato preliminarmente definito cosa voglia dire “non avere parti”, “giacere ugualmente rispetto ai suoi punti”, “inclinazione reciproca di due linee”). Come si è detto, non tutto si può definire, e quindi necessariamente alcuni concetti vanno assunti come primitivi. D’altra parte, nella concezione classica dell’assiomatica, i concetti primitivi hanno un riferimento oggettuale e i termini in questione, come si è detto, intendono in qualche modo individuarlo.

Il secondo gruppo contiene i *postulati*, ossia le proposizioni primitive specifiche della geometria:

«I. Risulti postulato: che si possa condurre una linea retta da un qualsiasi punto ad ogni altro punto.

II. E che una retta terminata (= finita) si possa prolungare continuamente in linea retta.

III. E che si possa descrivere un cerchio con qualsiasi centro ed ogni distanza (= raggio).

IV. E che tutti gli angoli retti siano uguali fra loro.

V. E che se una retta venendo a cadere su due rette forma gli angoli interni e dalla stessa parte minori di due retti (= tali che la loro somma sia minore di due retti), le due rette prolungate illimitatamente verranno ad incontrarsi da quella parte in cui sono gli angoli minori di due retti (= la cui somma è minore di due retti)».

Prima di svolgere qualche breve commento elenchiamo per completezza e per illustrare quanto precedentemente esposto, qualche proposizione del terzo gruppo, ossia delle *nozioni comuni*:

[2] Si tenga presente anche per il seguito che, nel linguaggio di Euclide, “retta” equivale al nostro “segmento”. Per ragioni sulle quali dobbiamo sorvolare, sostanzialmente legate al rifiuto dell’infinito attuale, la geometria greca accettava solo l’infinito potenziale: la retta, quindi, non era intesa come una linea infinita, ma come un segmento prolungabile a piacere in ambo i sensi.

«I. Cose che sono uguali ad una stessa sono uguali anche fra loro.
II. E se cose uguali sono addizionate a cose uguali, le totalità sono uguali.
VIII. E il tutto è maggiore della parte».

Tornando ai postulati, si può immediatamente rilevare il loro carattere costruttivo: il primo e il secondo sono relativi al tracciamento di rette e il terzo al tracciamento di cerchi; il quinto, sul quale torneremo ampiamente fra poco, stabilisce una condizione per costruire il punto d'intersezione di due rette. Il quarto è una premessa indispensabile del quinto, poiché stabilisce che l'angolo retto ha ampiezza determinata.

Come si è detto, secondo la concezione classica dell'assiomatica postulati e nozioni comuni devono essere proposizioni *evidenti*. Di fatto, l'evidenza del V postulato fu messa in dubbio già dall'antichità. Anzi, un esame accurato del primo libro degli *Elementi* corrobora l'ipotesi che lo stesso Euclide abbia esitato prima di annoverarlo fra i postulati. Vedremo infatti che si possono evidenziare tre vere e proprie "anomalie": (1) il V postulato è utilizzato, contrariamente a tutte le altre proposizioni primitive, molto avanti nel testo; (2) la proposizione inversa del V postulato è un teorema; (3) una proposizione è molto più "informativa" di due proposizioni precedenti. Dato che questa è l'origine di tutte le vicende che tratteremo nel seguito, appare utile soffermarsi brevemente su di essa.

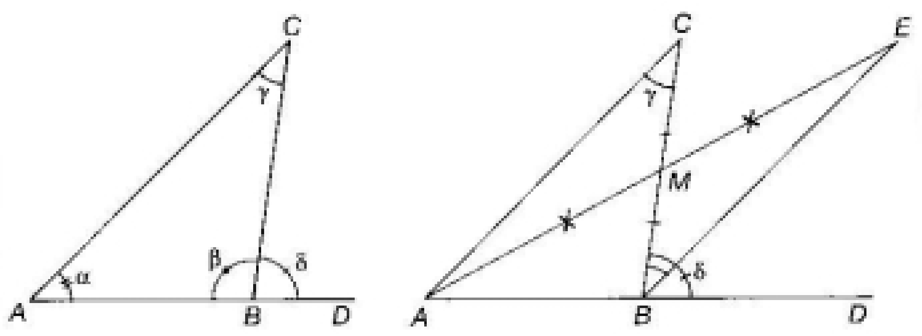
In primo luogo va rilevato che, dopo i tre gruppi di proposizioni primitive, Euclide inizia la lunga serie dei teoremi, detti *proposizioni* (e il primo libro termina, come si è detto, con le Proposizioni 47 e 48, ossia il teorema di Pitagora e il suo inverso). Ebbene, il V postulato non interviene che nella dimostrazione della Proposizione 29. Ciò significa che le prime ventotto proposizioni sono conseguenza solo delle altre proposizioni primitive, ossia appartengono a quella che oggi viene detta *geometria assoluta* (vale a dire la parte della geometria euclidea che non dipende dal V postulato). Questo fatto costituisce una prima "anomalia", nel senso che Euclide sfrutta fin dall'inizio tutte le altre proposizioni primitive, indipendentemente dal loro ordine progressivo.

Per comprendere adeguatamente quanto verremo esponendo è necessario sapere quali proposizioni possono essere dimostrate senza impiegare il V postulato. Elenchiamo le più importanti (che rientrano nelle prime ventotto proposizioni euclidee) : triangoli isosceli hanno gli angoli alla base uguali (e viceversa), i criteri di uguaglianza dei triangoli, l'esistenza e l'unicità della bisettrice di un angolo, del punto medio di un segmento, della perpendicolare condotta da un punto a una retta, le proprietà degli angoli adiacenti, consecutivi e opposti al vertice, le disuguaglianze tra lati e angoli di un triangolo (un lato è minore della somma degli altri due e maggiore della loro differenza, a lato maggiore è opposto angolo maggiore, e viceversa).

Per la nostra analisi è particolarmente importante la Proposizione 16 per cui la proponiamo con la relativa dimostrazione:

Proposizione 16: *In ogni triangolo, se si prolunga uno dei lati, l'angolo esterno è maggiore di ciascuno dei due angoli interni ed opposti.*
Dimostrazione. Sia ABC un triangolo. Prolunghiamo AB in D e dimostriamo che l'angolo esterno δ è maggiore dell'angolo interno non adiacente γ (figura 1):

Fig. 1



Uniamo A con il punto medio M di BC e prolunghiamo AM in modo che ME sia uguale ad AM. Dall'uguaglianza dei triangoli AMC e EMB (primo criterio) segue che $\gamma = MBE$. Essendo $MBE < \delta$ (il tutto è maggiore della parte), si ricava $\gamma < \delta$. Con analogo procedimento (considerando il punto medio di AB) si dimostra che $\alpha < \delta$.

Dalla Proposizione 16 segue facilmente la:

Proposizione 17: *In ogni triangolo la somma di due angoli, comunque presi, è minore di due retti.*
Dimostrazione. Con riferimento al triangolo in figura 1, da $\beta + \delta = 2$ retti (essendo β e δ adiacenti) e $\gamma < \delta$ (Proposizione 16), segue $\beta + \gamma < 2$ retti.

Possiamo leggere la Proposizione 17 nel modo seguente. Se due rette r e s tagliate dalla trasversale t si incontrano (figura 2), allora la somma degli angoli che formano con t dalla parte del punto di intersezione, essendo la somma di due angoli di un triangolo, è minore di due retti:

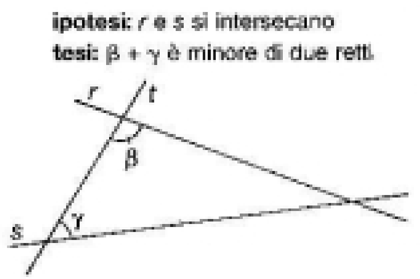


Fig. 2

In tal modo emerge chiaramente come la Proposizione 17 sia l'inversa del V postulato: se *r* e *s* tagliate dalla trasversale *t* formano con essa da una stessa parte angoli la cui somma è minore di due retti, allora *r* e *s* si incontrano:

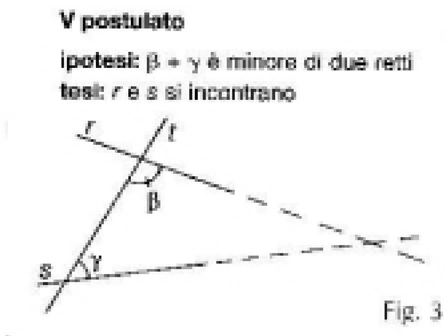


Fig. 3

Ecco quindi una seconda "anomalia": senza usare il V postulato si riesce a dimostrare la Proposizione 17; la proposizione inversa della 17 viene assunta da Euclide come V postulato. In genere, quando valgono sia una proposizione, sia la sua inversa, si riesce a dimostrare entrambe partendo dalle stesse premesse.

Dalle Proposizioni 16 e 17 si ottiene facilmente quanto Euclide esprime nelle Proposizioni 27 e 28: *se due rette r e s formano con una trasversale t due angoli coniugati interni la cui somma è due retti* (*oppure angoli alterni interni o angoli corrispondenti uguali*), *allora r e s sono parallele*.

Nel caso degli angoli coniugati interni supplementari, la dimostrazione si ottiene immediatamente per contrapposizione dalla Proposizione 17:

se $\beta + \gamma = 2$ retti (e quindi non è minore di 2 retti), allora *r* e *s* non si incontrano, ossia sono parallele.

I casi degli angoli alterni interni o corrispondenti uguali si riconducono facilmente a quello degli angoli coniugati interni supplementari. In definitiva (figura 4):

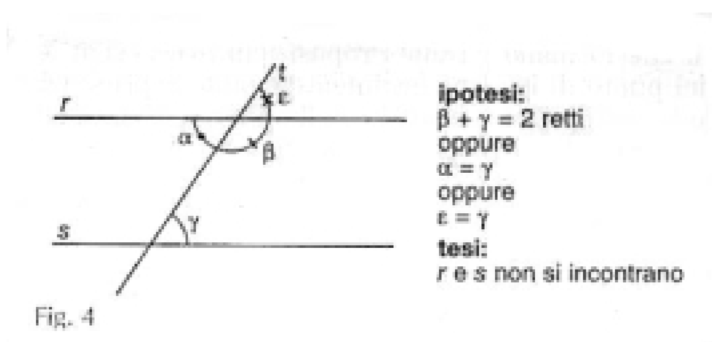


Fig. 4

Le inverse delle Proposizioni 27 e 28, compendiate da Euclide nella Proposizione 29, si dimostrano impiegando il V postulato.

Se r e s sono parallele, *allora formano con una trasversale t angoli coniugati interni supplementari*, *angoli alterni interni e angoli corrispondenti uguali* (figura 5):

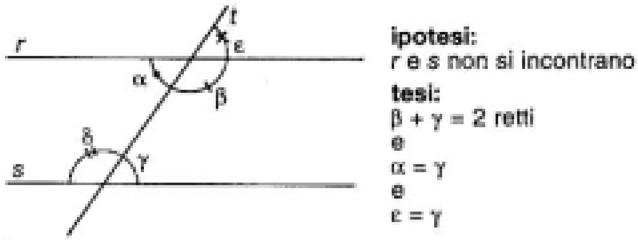


Fig. 5

Esaminiamo il caso degli angoli coniugati interni (gli altri due si riconducono immediatamente ad esso).
Supponiamo, per assurdo, che non valga $\beta + \gamma = 2$ retti.
Se fosse $\beta + \gamma < 2$ retti, *r* e *s* si incontrerebbero, per il V postulato, a destra di *t*, contro l'ipotesi che *r* e *s* siano parallele.
Se fosse $\beta + \gamma > 2$ retti, allora, essendo $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 4$ retti, si avrebbe $\alpha + \delta < 2$ retti e, sempre per il V postulato, *r* e *s* si incontrerebbero a sinistra di *t*, contro l'ipotesi che *r* e *s* siano parallele.

Quindi, le Proposizioni 27 e 28 (figura 4) fanno parte della geometria assoluta, mentre la dimostrazione della Proposizione 29 (figura 5) richiede l'intervento del V postulato.

Nella Proposizione 31 Euclide fa vedere come si può costruire, data una retta *r* e un punto *P* fuori di essa, una parallela per *P* a *r*:

Proposizione 31: *Condurre per un punto dato una linea retta parallela ad una retta data*.

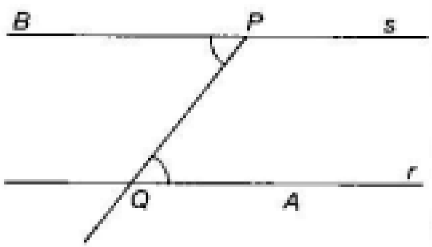


Fig. 6

Basta unire *P* con un qualsiasi punto *Q* di *r* e costruire l'angolo *QPB* uguale all'angolo *PQA*. La retta *s* del lato *PB* è parallela a *r*; infatti, *r* e *s* formano con la trasversale *PQ* angoli alterni interni uguali e quindi sono parallele per la Proposizione 27.

Dato che la dimostrazione della Proposizione 31 si basa solo sulla Proposizione 27 e non richiede l'impiego del V postulato, *l'esistenza della parallela per un punto a una retta è un teorema della geometria assoluta*.

Vediamo ora la:

Proposizione 32: *In ogni triangolo, se si prolunga uno dei lati, l'angolo esterno è uguale alla somma dei due angoli interni ed opposti, e la somma dei tre angoli interni del triangolo è uguale a due retti.*
Dimostrazione. Tracciata per *B* la parallela *BE* al lato *AC* (Proposizione 31), per l'uguaglianza degli angoli alterni interni e corrispondenti evidenziati in figura 7 (Proposizione 29) si ha immediatamente che l'angolo esterno *CBD* è uguale alla somma $\alpha + \gamma$ degli angoli interni non adiacenti ad esso e che $\alpha + \beta + \gamma = 2$ retti.

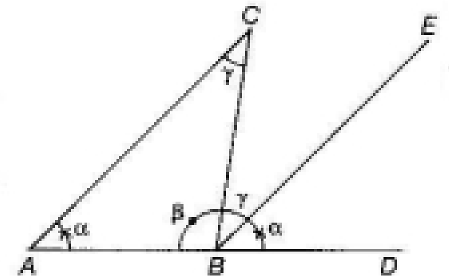


Fig. 7

Pertanto, nella Proposizione 32 Euclide ottiene il ben noto e importante risultato sulla somma degli angoli interni dei triangoli, che nel seguito indicheremo brevemente con $S = 2R$. Si noti che nella dimostrazione è intervenuta la Proposizione 29, e quindi la Proposizione 32 dipende dal V postulato.

Ed ecco la terza ancora più evidente "anomalia". È evidente che, una volta ottenuta la Proposizione 32, le Proposizioni 16 e 17 divengono superflue: se l'angolo esterno di un triangolo è la somma dei due angoli interni non adiacenti, allora è maggiore di ciascuno di essi, e se la somma dei tre angoli interni è due retti, la somma di due angoli interni è minore di due retti. Per quale ragione Euclide dimostra prima due proposizioni per così dire meno informative, e dopo una che le comprende? Si potrebbe essere tentati di rispondere che ciò sia stato motivato dall'intento di proporre un percorso dimostrativo più lineare e di più agevole comprensione, ossia, in sintesi, per facilitare l'apprendimento da parte dei lettori graduando in qualche misura le difficoltà. Questa giustificazione, che ai nostri occhi appare del tutto plausibile, è in realtà inconsistente, perché totalmente estranea allo spirito con cui è compilata l'intera opera. Si può fondatamente sostenere che nessun espediente di natura "didattica" è presente negli *Elementi* euclidei. Appare più ragionevole ipotizzare che Euclide abbia esitato a introdurre il V postulato tra le proposizioni primitive e cercato di ottenerlo come teorema, dimostrando il maggior numero possibile di proposizioni senza impiegarlo: le Proposizioni 16 e 17, a differenza della 32, si dimostrano senza ricorrere ad esso. Solo dopo aver constatato il fallimento dei suoi tentativi di dimostrarlo e ritenendolo essenziale per lo sviluppo della geometria, ha dovuto inserirlo tra i postulati e ha iniziato a utilizzarlo solo a partire dalla ventinovesima proposizione.

In sintesi, l'analisi condotta sul primo libro sembra suggerire che lo stesso Euclide abbia avuto dei dubbi sulla legittimità del V postulato, ossia che, essendo tra l'altro la proposizione inversa di una proposizione dimostrabile, non possedesse il grado di evidenza che, secondo i canoni aristotelici, ogni principio doveva possedere (per evitare fraintendimenti, ricordiamo che non era in gioco la semplice "verità" del V postulato, ma la sua "verità di per sé"). Considerato inoltre che, secondo i canoni del metodo assiomatico, i postulati devono essere il minor numero possibile, si può concludere che Euclide, prima di assumere il V postulato, abbia cercato di dimostrarlo. In ogni caso, indipendentemente dall'attendibilità di questa lettura del primo libro degli *Elementi*, è un fatto che, da quel momento, quasi tutti i matematici si proposero di "emendare" Euclide cercando di diminuire il numero dei postulati *dimostrando* il V postulato.