LE GEOMETRIE NON EUCLIDEE FRA CULTURA, STORIA E DIDATTICA DELLA MATEMATICA

Dario Palladino
(Università di Genova)

Seconda parte
Momenti della storia dei tentativi di dimostrazione del V postulato di Euclide

Premessa

Nel precedente intervento abbiamo delineato le caratteristiche della concezione classica dell'assiomatica ed esaminato alcuni aspetti dell'opera che per più di due millenni è stata considerata il paradigma della sistemazione scientifica rigorosa, vale a dire gli *Elementi* di Euclide. Si è poi discussa la peculiare posizione di una delle proposizioni primitive, vale a dire il V postulato, sulla quale si è accentrata l'attenzione dei matematici successivi, dato che ai più sembrava che non avesse quel requisito di evidenza necessario per elevare una proposizione al rango di principio di una scienza rigorosamente fondata.

Tanto per fare un esempio, Proclo (410-485 d.C.), l'autore al quale dobbiamo la maggior parte delle informazioni sulla matematica greca e che influenzò le ricerche successive sulla teoria delle rette parallele, nel suo *Commento al primo libro degli Elementi di Euclide*, a proposito del V postulato scrive: «Anche questo deve essere assolutamente cancellato dai postulati perché è un teorema...». Tuttavia, i tentativi di dimostrazione del V postulato che si sono protratti fino all'Ottocento sono falliti: nessuno è riuscito a dimostrare che il V postulato è un teorema della geometria assoluta. Nella maggior parte dei casi si riusciva a ottenere il V postulato assumendo una nuova ipotesi, la quale risultava poi equivalente al V postulato stesso. In questo intervento vedremo un ampio elenco di proposizioni equivalenti al postulato euclideo.

Il V postulato e l'unicità della parallela

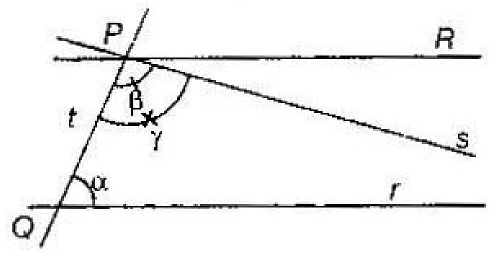
La prima proposizione che prendiamo in considerazione, attribuibile a Proclo, è l'unicità della parallela:

Unicità della parallela: *Dati nel piano un punto e una retta esterna ad esso, per il punto passa al più una retta parallela alla retta data.*

Si ricordi che l'esistenza della parallela è un teorema della geometria assoluta (Proposizione 31 del primo libro degli *Elementi*). La proposizione precedente afferma quindi che la parallela per un punto a una retta, che già sappiamo esistere, è unica.

I) *Dal V postulato segue l'unicità della parallela.*
Dimostrazione. Siano r una retta e P un punto esterno ad essa. Sia PQ una trasversale qualsiasi e α l'angolo che essa forma con r. Delle rette passanti per P al più una può formare con PQ (dalla parte di α) un angolo γ tale che $\alpha + \gamma = 2$ retti (figura 1). Tutte le altre, per il V postulato, incontrano r, per cui per P passa al più una retta parallela a r.

Fig. 1



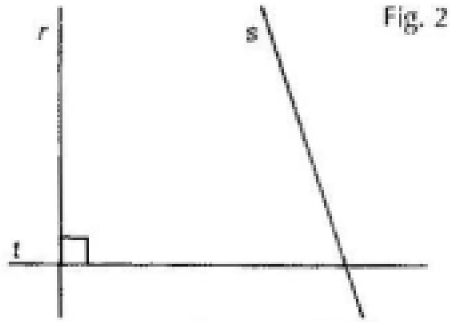
II) *Dall'unicità della parallela segue il V postulato.*
Dimostrazione. Siano r e s due rette che, tagliate dalla trasversale t, formino due angoli α e β tali che $\alpha + \beta < 2$ retti (vedi sempre la figura 1). Sia PR la retta per P che forma con PQ un angolo γ tale che $\alpha + \gamma = 2$ retti. PR risulta distinta da r (poiché $\gamma > \beta$) e risulta parallela a r per la proposizione 28 di Euclide. Dall'unicità della parallela segue allora che s non può essere parallela a r e che di conseguenza incontra r come richiesto dal V postulato.

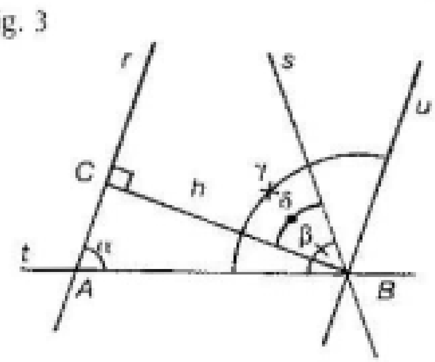
A titolo di esercizio si dimostri l'equivalenza con l'unicità della parallela (e quindi con il V postulato) delle seguenti proposizioni attribuibili a Proclo:

1) Se una retta incontra una di due rette parallele, allora incontra anche l'altra.
2) Due rette parallele a una terza sono parallele fra loro.
3) Se una retta è parallela a una seconda retta e quest'ultima è parallela a una terza retta, allora la prima retta è parallela alla terza (*transitività del parallelismo*).
4) Due rette secanti sono divergenti (ossia i segmenti di perpendicolare abbassati dai punti di una sull'altra ad essa secante aumentano oltre ogni limite) mentre due rette parallele mantengono distanza finita (ossia superiormente limitata).

Prima di proseguire osserviamo che tra le proposizioni equivalenti al V postulato vi è un suo caso particolare, detto ***postulato dell'obliqua***:

> *Una perpendicolare e un'obliqua a una stessa retta si incontrano dalla parte in cui l'obliqua forma con la retta un angolo acuto.*





È evidente che dal V postulato segue il postulato dell'obliqua che ne costituisce il caso particolare quando uno dei due angoli formati dalle rette *r* e *s* con la trasversale *t* è retto (figura 2).

La dimostrazione che dal postulato dell'obliqua segue il V postulato è più sottile. La proponiamo come esempio dell'attenzione che occorre prestare quando si deve ragionare nella geometria assoluta. Per dimostrare il V postulato, consideriamo due rette *r* e *s* che, tagliate dalla trasversale *t*, formano due angoli α e β la cui somma è minore di 2 retti (figura 3). Dobbiamo dimostrare che *r* e *s* si incontrano. Almeno uno dei due angoli α e β è acuto; sia esso α. Se abbassiamo da *B* la perpendicolare *h* su *r*, il piede *C* cade al di sopra di *t*. A questo punto, per concludere che *r* e *s* si incontrano, si può osservare che *r* e *s* sono rispettivamente perpendicolare e obliqua alla retta *h*. Occorre però, senza lasciarsi influenzare dalla figura, dimostrare che *s* è effettivamente obliqua rispetto a *h*, ossia che l'angolo δ è acuto. A tal fine si consideri la retta *u* che forma con *t* l'angolo γ tale che $\alpha + \gamma = 2$ retti. Dato che per ipotesi $\alpha + \beta < 2$ retti, $\beta < \gamma$. Va ora osservato che *u* è parallela a *r* (per la proposizione 28 di Euclide). Dato che *r* è perpendicolare a *h* e non incontra *u*, *u* non può essere obliqua rispetto a *h* (altrimenti *u* e *r* si incontrerebbero per il postulato dell'obliqua) e quindi è ad essa perpendicolare; ma allora δ, essendo minore di un angolo retto, è acuto come si voleva dimostrare.

Il V postulato e la somma degli angoli di un poligono

Nel precedente intervento abbiamo visto (Proposizione 32 degli *Elementi*) che dal V postulato segue che la somma degli angoli interni di un triangolo è due retti ($S = 2R$).

Si può dimostrare che vale anche il viceversa:

(a) *Se* $S = 2R$, *allora vale il V postulato*

per cui, la proposizione $S = 2R$ è equivalente al V postulato.

Valgono poi, *nella geometria assoluta*, i due seguenti teoremi:

(b) *Se la somma degli angoli di un triangolo è minore, uguale, o maggiore di 2 retti in un solo triangolo, lo stesso avviene in ogni triangolo.*

Dato un triangolo qualsiasi, la somma dei suoi angoli interni non può che essere o minore, o uguale, o maggiore di due retti. Il teorema afferma che ciò che si verifica in un triangolo si verifica in tutti i triangoli. Quindi, o in tutti i triangoli $S < 2R$, o in tutti i triangoli $S = 2R$, o in tutti i triangoli $S > 2R$.

(c) *La somma degli angoli di un triangolo non è maggiore di* 2 *angoli retti* ($S \leq 2R$).

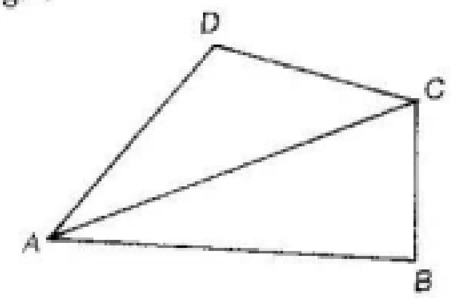
Questo teorema afferma che il terzo dei casi precedenti non si può realizzare: in geometria assoluta si può escludere che la somma degli angoli di un triangolo sia maggiore di 2 retti; quindi, o in tutti i triangoli $S < 2R$, o in tutti i triangoli $S = 2R$.

In geometria euclidea la somma degli angoli di tutti i triangoli è 2 retti, di tutti i quadrilateri è 4 retti, di tutti i pentagoni è 6 retti, di tutti gli esagoni è 8 retti, e così via. Ciascuna di queste proposizioni è equivalente al V postulato. Vediamolo per i quadrilateri:

Se vi è un quadrilatero con somma degli angoli interni 4 *retti, allora vale il V postulato.*

Dimostrazione. Sia $ABCD$ un quadrilatero con $S = 4R$ (figura 4).

Fig. 4



Dividiamolo in due triangoli ABC e ADC mediante la diagonale AC. La somma degli angoli dei due triangoli è evidentemente uguale a quella del quadrilatero ossia a $4R$. Ne segue che la somma degli angoli di ciascuno dei due è $2R$. Infatti, se la somma degli angoli di uno dei due fosse inferiore a $2R$, nell'altro dovrebbe essere superiore a $2R$, contro quanto stabilito in (c). Dal fatto che in un triangolo $S = 2R$, segue, per la (b), che $S = 2R$ in tutti i triangoli e quindi, per la (a), che vale il V postulato.

Dato che ogni poligono può essere scomposto in triangoli, si procede in modo analogo nel caso dei pentagoni, o degli esagoni, e così via.

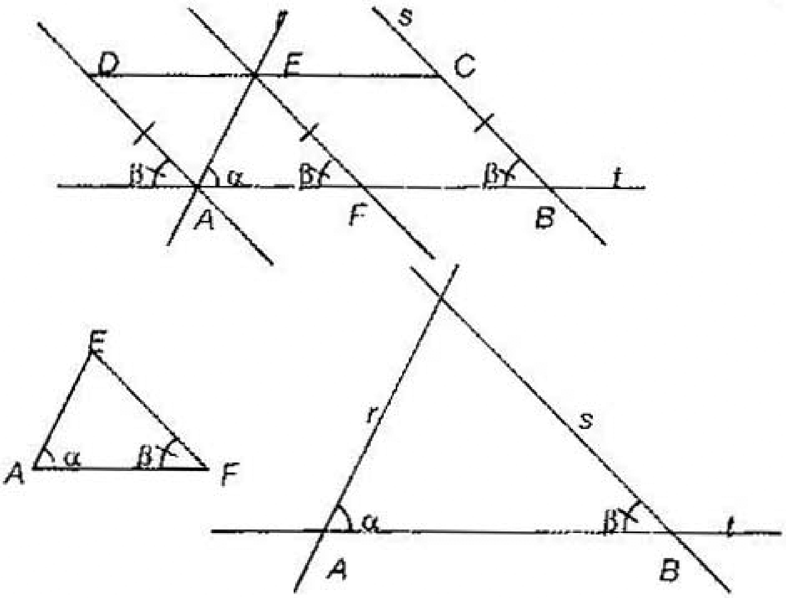
Il V postulato e la similitudine

Il matematico inglese John Wallis (1616-1703) dedusse il V postulato dalla seguente proposizione:

Dato un qualsiasi triangolo se ne può costruire un altro ad esso simile (*cioè con gli stessi angoli*) *di lato assegnato.*

Siano *r* e *s* due rette che formino con la trasversale *t* due angoli α e β la cui somma sia minore di 2*R* (figura 5). Dobbiamo dimostrare che *r* e *s* si incontrano. Preso su *s* un punto *C* trasportiamo *s* in modo che formi con *t* sempre l'angolo β fino a che *B* coincida con *A*: il punto *C* si troverà nella posizione *D* a sinistra di *r*. Durante il movimento il punto *C* dovrà essersi trovato su *r* nella posizione *E*; sia *F* la posizione corrispondente di *B*.

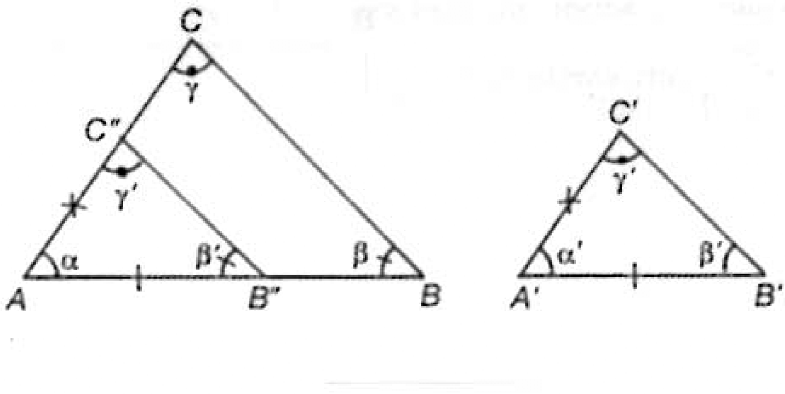
Fig. 5



Il triangolo *AFE* ha due angoli uguali a α e β. Costruendo, per la proposizione di Wallis, su *AB* il triangolo simile a *AFE*, il terzo vertice del triangolo è il punto cercato d'intersezione di *r* e *s*.

Il risultato di Wallis può essere perfezionato nel modo seguente:

Se esistono due triangoli simili non uguali, allora vale il V postulato.
Dimostrazione. Se *ABC* e *A′B′C′* sono i triangoli aventi $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$, sia, ad esempio, $AB > A'B'$ (figura 6).



Si prenda su AB il punto B'', tale che $AB'' = A'B'$. Sia C'' il punto di AC tale che $AC'' = A'C'$. Dall'uguaglianza dei triangoli $B''AC''$ e $B'A'C'$ (I criterio di uguaglianza), segue che $AB''C'' = \beta' = \beta$, per cui il punto C'' deve essere necessariamente interno ad AC, poiché BC e $B''C''$ sono parallele per la proposizione 28 di Euclide. A questo punto basta osservare che nel quadrilatero $BCC''B''$ la somma degli angoli interni è 4 retti (poiché due angoli sono supplementari degli altri due) per concludere, in base a quanto visto nel paragrafo precedente, che vale il V postulato.

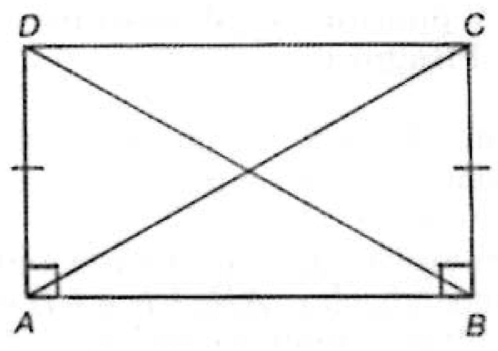
Il V postulato e le rette equidistanti

Da Proclo si apprende che Posidonio (II secolo a.C.) riuscì a dimostrare il V postulato assumendo come definizione di rette parallele la seguente: «Si dicono *parallele* due rette equidistanti». Questo risultato appare a prima vista risolutivo, in quanto sembra comportare solo il cambiamento di una *definizione* e nel definire si può agire con una certa libertà. In realtà le cose non stanno così: quando si congiungono due o più proprietà bisogna accertare che esse siano compatibili, altrimenti la definizione è priva di referente (ad esempio non esiste alcun "cerchio con quattro angoli retti", dato che "essere cerchio" e "avere quattro angoli retti" sono proprietà incompatibili). Prima di definire "parallele" due rette equidistanti occorre stabilire che "essere retta" e "essere il luogo dei punti equidistanti da una retta" sono compatibili; in altre parole bisogna aver dimostrato la proposizione:

Il luogo dei punti equidistanti da una retta è una retta.

In geometria euclidea tale proposizione si dimostra facilmente, ma qui si sta ragionando nell'ambito della geometria assoluta: Posidonio, proponendo la nuova definizione di parallele per ottenere come teorema il V postulato, assumeva implicitamente la proposizione precedente che, come si può dimostrare, è equivalente al V postulato. Per vederlo premettiamo una considerazione relativa ad una figura, detta *quadrilatero birettangolo isoscele*, della quale ci serviremo anche in seguito.

Su una base AB si tracciano due segmenti uguali AD e BC perpendicolari ad AB e si unisce C con D (figura 7):

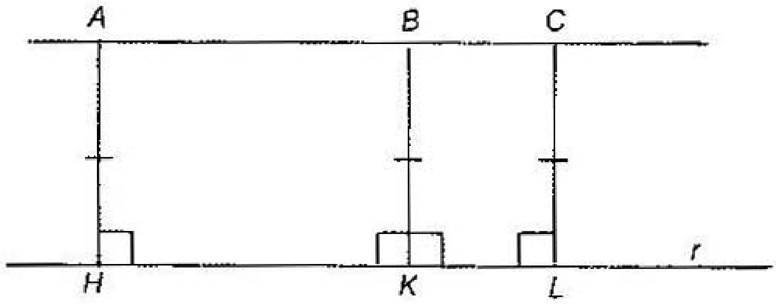


Si ottiene un rettangolo? Bisogna stare attenti prima di rispondere. Dato che siamo abituati a ragionare nella geometria euclidea saremmo tentati a

rispondere affermativamente. Ma qui stiamo ragionando nella geometria assoluta e occorre essere cauti vedendo cosa si può dedurre con le premesse a nostra disposizione.
I triangoli rettangoli *DAB* e *CBA* sono uguali per il primo criterio di uguaglianza, per cui *DB* = *AC*. Ne segue che sono uguali, per il terzo criterio, i triangoli *ADC* e *BDC*. Sono quindi uguali gli angoli in *C* e in *D* del quadrilatero. Non si può però concludere che tali angoli sono retti. Anzi, come già sappiamo, supporre che *C* e *D* siano retti equivale ad affermare che la somma degli angoli di *ABCD* è 4 retti, e quindi che vale il V postulato. Osserviamo ancora che, se si suppone che *AB* = *CD*, allora sono uguali, per il terzo criterio, i triangoli *DAB* e *CDA* e pertanto l'angolo in *D* è retto, per cui *ABCD* è un rettangolo e vale il V postulato.

Supponiamo ora che *esistano tre punti* ***allineati*** *A*, *B e C equidistanti da una retta r* (figura 8): i tre segmenti *AH*, *BK* e *CL* di perpendicolare abbassati da *A*, *B* e *C* su *r* sono uguali.

Fig. 8



I quadrilateri *AHKB*, *BKLC* e *AHLC* sono birettangoli isosceli, per cui sono uguali i quattro angoli in *A*, *B* e *C*. Dato che per ipotesi i punti *A*, *B* e *C* sono allineati, l'angolo in *B* è piatto e i quattro angoli sono retti. Ne segue che i quadrilateri birettangoli isosceli sono rettangoli, e dall'esistenza di rettangoli, come si è visto, segue il V postulato.

In definitiva, basta ammettere che esistano tre punti allineati equidistanti da una retta per poter dimostrare il V postulato.

Il V postulato e il teorema di Pitagora

Consideriamo un triangolo *ABC* e siano *M* e *N* i punti medi dei lati *AB* e *AC* (figura 9).

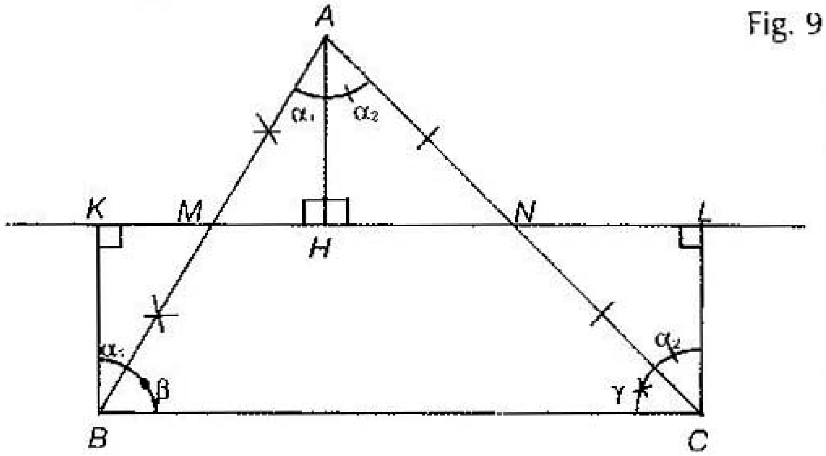


Fig. 9

Dai vertici A, B, C abbassiamo le perpendicolari AH, BK e CL sulla congiungente i punti medi M e N. I triangoli rettangoli AHM e BKM, avendo uguali l'ipotenusa e un angolo acuto sono uguali, e analogamente sono uguali i triangoli rettangoli AHN e CLN. Ne segue che $BK = AH = CL$ e che MN è metà di KL. Si osservi ora che il quadrilatero $KBCL$ è birettangolo isoscele sulla base KL e che la somma dei suoi angoli in B e C è uguale alla somma degli angoli del triangolo dato ABC.

Ciò premesso consideriamo la proposizione:

La congiungente i punti medi di due lati di un triangolo è metà del terzo lato.

Essa esprime un noto teorema di geometria euclidea, ossia si dimostra utilizzando il V postulato[1]. Vale anche il viceversa, ossia da essa segue il V postulato. Infatti, applicandola al triangolo ABC, si ha $BC = 2MN$, e quindi $BC = KL$. Per quanto osservato nel paragrafo precedente, ne segue che $KBCL$ è un rettangolo e quindi che vale il V postulato.

Supponiamo ora che il triangolo ABC sia rettangolo in A e indichiamo con a, b, c le misure dell'ipotenusa BC e dei cateti AB e AC (e quindi risultano $b/2$ e $c/2$ quelle dei segmenti AM e AN) e con d la misura di MN. Se si applica il teorema di Pitagora ai triangoli rettangoli ABC e AMN si ottiene:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$d^2 = \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4}$$

Dalle due formule segue $a^2 = 4d^2$ e quindi $a = 2d$, ossia $BC = 2MN$. Come si è appena visto, da questa relazione segue il V postulato.

[1] Una dimostrazione segue facilmente da quanto precede: se vale il V postulato, $S = 2R$, per cui gli angoli uguali in B e C di $KBCL$ sono retti. Ma allora $KBCL$ è un rettangolo, per cui $BC = KL$; ma $KL = 2MN$ e quindi $BC = 2MN$.

In definitiva, non solo il teorema di Pitagora segue dal V postulato, ma è equivalente ad esso, ossia lo si potrebbe assumere come postulato al suo posto e l'insieme dei teoremi resterebbe inalterato.

Conclusione

Abbiamo visto varie proposizioni equivalenti al V postulato, ma ve ne sono numerose altre, tra cui, ad esempio:

Un angolo inscritto in una semicirconferenza è retto.

L'angolo al centro di una circonferenza è doppio del corrispondente angolo alla circonferenza.

Per tre punti non allineati passa sempre una circonferenza.

Le tre altezze di un qualsiasi triangolo passano per uno stesso punto.

I tre assi dei lati di un qualsiasi triangolo passano per uno stesso punto.

Abbiamo constatato quanto numerosi siano i teoremi della geometria euclidea che sono equivalenti al V postulato. Quest'ultimo regola il comportamento di due rette tagliate da una trasversale e tuttavia è equivalente a proposizioni relative alla somma degli angoli dei triangoli e dei poligoni, agli angoli inscritti in una semicirconferenza, al teorema di Pitagora (che è relativo all'equivalenza di quadrati), all'esistenza dell'ortocentro e del circocentro di un triangolo, è il presupposto dell'intera teoria euclidea della similitudine (senza il V postulato non si può dimostrare che esistano poligoni simili che non siano uguali).

La storia dei tentativi di dimostrazione del V postulato rivela come il risultato sembrasse sempre più vicino; tuttavia, alla fine, risultava che la conclusione era ottenuta facendo appello a una nuova proposizione che risultava equivalente al V postulato stesso. Una svolta avvenne all'inizio dell'Ottocento, quando in alcuni studiosi cominciò a maturare la convinzione che il V postulato fosse indimostrabile nella geometria assoluta. Di questi eventi ci occuperemo nei prossimi interventi.