LE GEOMETRIE NON EUCLIDEE FRA CULTURA, STORIA E DIDATTICA DELLA MATEMATICA

Dario Palladino
(Università di Genova)

Terza parte
Saccheri e le prime proprietà della geometria iperbolica

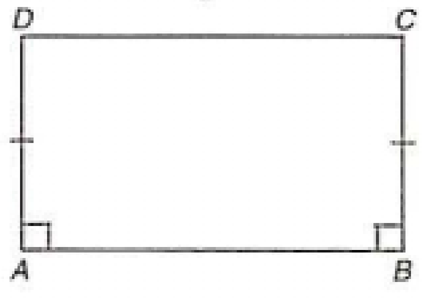
Premessa

Nei due articoli precedenti, esaminando vari tentativi di dimostrazione del V postulato, abbiamo determinato molteplici proposizioni ad esso equivalenti. Si è poi accennato al fatto che, all'inizio dell'Ottocento, in alcuni studiosi maturò la convinzione che il V postulato fosse indimostrabile nell'ambito della geometria assoluta. In seguito tale convinzione poté essere provata in modo rigoroso. Ciò significa che, se si aggiunge agli assiomi della geometria assoluta la negazione del V postulato, si ottiene una teoria coerente, detta *geometria iperbolica*, la quale costituisce una delle due *geometrie non euclidee*. Prima di esaminare alcune caratteristiche della geometria iperbolica e come si è pervenuti alla sua accettazione, ci soffermiamo brevemente, per ragioni sia storiche che didattiche, su uno dei più approfonditi tentativi di dimostrazione del V postulato, vale a dire quello condotto da Gerolamo Saccheri (1667-1733).

L'opera di Saccheri

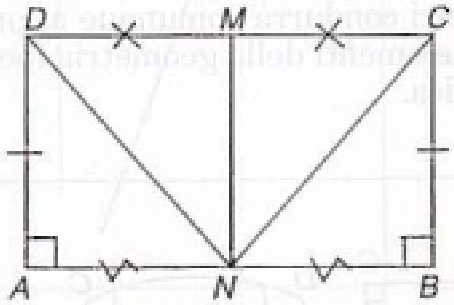
L'interesse del tentativo di dimostrazione del V postulato da parte di Saccheri (*Euclides ab omni naevo vindicatus*, 1733) sta nel fatto che il gesuita ligure intraprese una strategia argomentativa basata su una forma di *reductio ad absurdum* riferita ai quadrilateri birettangoli isosceli, ossia ai quadrilateri già precedentemente introdotti, detti anche *quadrilateri di Saccheri*, con due angoli retti e due lati uguali, disposti come in figura 1:

Fig. 1



Si dimostra facilmente (vedi anche il nostro precedente intervento) che $\hat{C} = \hat{D}$. Inoltre, se si uniscono i punti medi M e N dei lati CD e AB, MN è perpendicolare ai lati CD e AB (figura 2):

Fig. 2



Infatti, i triangoli rettangoli DAN e CBN sono uguali (per il I criterio di uguaglianza), e quindi $ND = NC$, per cui sono uguali (per il III criterio di uguaglianza) i triangoli NMD e NMC. Dall'uguaglianza degli angoli adiacenti $N\hat{M}D$ e $N\hat{M}C$ segue che sono entrambi retti. In modo analogo (unendo M con A e B) si dimostra che sono retti gli angoli $M\hat{N}A$ e $M\hat{N}B$.

A questo punto Saccheri enuncia le tre possibili ipotesi relative alla natura degli angoli in C e D:

$\hat{C} = \hat{D}$ = acuto (ipotesi dell'angolo acuto)

$\hat{C} = \hat{D}$ = retto (ipotesi dell'angolo retto)

$\hat{C} = \hat{D}$ = ottuso (ipotesi dell'angolo ottuso)

e dimostra varie proprietà valide a seconda di quale delle tre ipotesi si realizza. Osserviamo subito che, se si ricorda quanto visto nel precedente intervento a proposito della figura 9, le tre ipotesi di Saccheri equivalgono a supporre che la somma degli angoli di un triangolo sia, rispettivamente, *minore*, *uguale o maggiore di due angoli retti*. La strategia di Saccheri consiste nel dimostrare che assumendo o l'ipotesi dell'angolo acuto o quella dell'angolo ottuso si perviene ad una contraddizione. Con ciò rimarrebbe dimostrato che vale l'ipotesi dell'angolo retto, ossia che i quadrilateri birettangoli isosceli sono rettangoli, e, come si è visto, dall'esistenza di rettangoli segue il V postulato.

Prima di descrivere la struttura dell'opera di Saccheri, vediamo la sua terza proposizione, che, probabilmente, è il primo teorema di geometria non euclidea apparso nella storia della matematica:

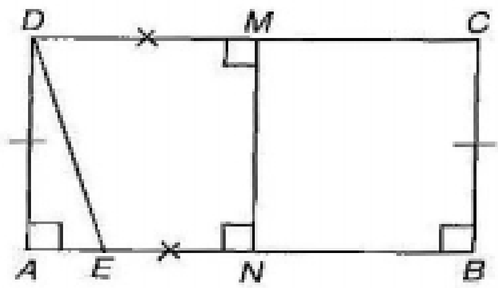
Il lato CD è maggiore, uguale, o minore di AB a seconda che valga l'ipotesi dell'angolo acuto, retto, ottuso.

Trattiamo il caso dell'*ipotesi dell'angolo acuto* (figura 3).

Si vuole dimostrare che $DC > AB$. A tal fine dimostriamo, per assurdo, che non può essere né $DC = AB$, né $DC < AB$.

Se fosse $DC = AB$, sarebbe anche $DM = AN$ e quindi, per quanto già dimostrato, il quadrilatero $ANMD$ risulterebbe birettangolo isoscele sulla base MN, per cui gli angoli in A e in D sarebbero uguali. Ma ciò è assurdo perché A è retto per costruzione e D, per ipotesi, è acuto.

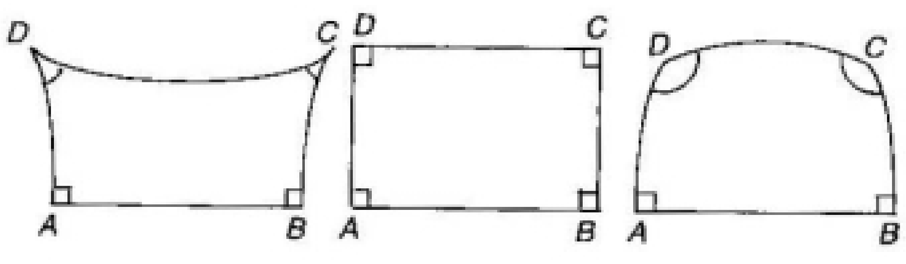
Fig. 3



Se fosse $DC < AB$, sarebbe anche $MD < AN$. Preso su AN il punto E tale che $NE = MD$, il quadrilatero $DMNE$ risulterebbe birettangolo isoscele sulla base MN, per cui $M\hat{D}E = D\hat{E}N$. Ma ciò è assurdo perché $M\hat{D}E$, essendo parte dell'angolo acuto $M\hat{D}A$, è acuto e l'angolo $D\hat{E}N$, essendo esterno al triangolo rettangolo DAE, per la Proposizione 16 di Euclide è maggiore dell'angolo retto $D\hat{A}N$, e quindi ottuso.

Il lettore completi la dimostrazione trattando i casi relativi alle ipotesi dell'angolo retto e dell'angolo ottuso. Indipendentemente dal contenuto specifico di questa proposizione è interessante osservare che abbiamo dovuto ragionare supponendo che gli angoli in C e D del quadrilatero $ABCD$ non fossero retti, contrariamente a quanto risulta dalla figura. In casi come questo può rivelarsi utile tracciare delle figure opportunamente "deformate" nelle quali appaiano più evidenti le ipotesi che si stanno assumendo. Ad esempio, nel caso del quadrilatero birettangolo isoscele, si possono rappresentare le tre ipotesi dell'angolo acuto, retto, ottuso nel modo seguente:

Fig. 4



nel quale sono "visibili" gli angoli superiori acuti, retti, ottusi e le relazioni $DC > AB$, $DC = AB$, $DC < AB$ ora dimostrate. Questo espediente si rivelerà necessario quando dovremo fare le figure delle geometrie non euclidee. All'obiezione che sorge spontanea: «in queste figure i segmenti non sono più rettilinei, ma curvi!», va risposto nel modo seguente: come già i matematici greci sottolineavano con forza, non è tracciando una figura che si dimostra un teorema, ma le figure hanno soltanto una funzione ausiliaria, ossia compendiare e visualizzare le informazioni rilevanti. In ogni caso, a parte questo aspetto che potrebbe essere ulteriormente approfondito, in questa sede è significativo il fatto che le due figure relative all'ipotesi dell'angolo acuto e dell'angolo ottuso corrispondono proprio alle situazioni delle geometrie non euclidee, e sono tracciate così per facilitare non solo l'intuizione, ma anche le dimostrazioni nelle nuove geometrie. La loro "stranezza" fa anche capire da cosa fossero ispirati i bimillenari tentativi di dimostrazione del V postulato: far vedere che quelle figure non sono solo "bizzarre", ma logicamente assurde. Riuscire a dimostrare il V postulato significherebbe al tempo stesso dimostrare che gli angoli in C e D dei quadrilateri birettangoli isosceli sono retti e che le altre due ipotesi sono impossibili perché in contraddizione con gli assiomi della geometria assoluta: di conseguenza l'unica geometria coerente risulterebbe quella euclidea (e non vi sarebbe spazio per le geometrie non euclidee). Come abbiamo più volte anticipato la storia è andata diversamente.

Nell'opera di Saccheri sono presenti altre proposizioni sulle quali riflettere come abbiamo fatto a proposito della terza. In questa sede dobbiamo limitarci a una panoramica schematica, che ci condurrà comunque ai primi elementi della geometria iperbolica.

La confutazione dell'ipotesi dell'angolo ottuso

Nella prime proposizioni della sua opera Saccheri dimostra proprietà dei quadrilateri e dei triangoli nelle tre ipotesi e ottiene alcuni interessanti risultati: in primo luogo, le sue ipotesi dell'angolo acuto, retto, ottuso sono mutuamente esclusive, ossia *l'ipotesi che si verifica in un quadrilatero birettangolo isoscele si verifica in tutti gli altri quadrilateri birettangoli isosceli*. Inoltre, dimostra quanto già abbiamo anticipato circa i nessi fra le sue tre ipotesi e la somma S degli angoli di un triangolo: S è minore, uguale, maggiore di due retti a seconda che valga l'ipotesi dell'angolo acuto, retto, ottuso (e viceversa). Unendo i due risultati si ha:

1) *Se la somma degli angoli di un triangolo è minore, uguale, o maggiore di* 2 *retti in un solo triangolo, lo stesso avviene in ogni triangolo.*

Dopo qualche altra proposizione Saccheri perviene a dimostrare che:

Nell'ipotesi dell'angolo retto e nell'ipotesi dell'angolo ottuso una perpendicolare e un'obliqua a una stessa retta si incontrano.

Si ricordi che "una perpendicolare e un'obliqua a una stessa retta si incontrano" non è altro che il postulato dell'obliqua, che abbiamo visto essere una forma equivalente del V postulato. In sostanza, la proposizione precedente può essere spezzata nelle due seguenti:

Nell'ipotesi dell'angolo retto vale il V postulato.

Nell'ipotesi dell'angolo ottuso vale il V postulato.

Tenuto conto di quanto precede, la prima si può esprimere come segue:

2) *Se* $S = 2R$, *allora vale il V postulato.*

Con ciò è provato che l'ipotesi dell'angolo retto conduce all'usuale geometria euclidea. Per quanto riguarda la seconda si presti attenzione a cosa comporta: dall'ipotesi dell'angolo ottuso segue il V postulato; ma dal V postulato segue che vale l'ipotesi dell'angolo retto, e quindi che non vale quella dell'angolo ottuso. Nella Proposizione 14 Saccheri può quindi concludere: «L'ipotesi dell'angolo ottuso è completamente falsa, perché distrugge se stessa». Con ciò il gesuita ligure ha completato la prima metà dell'impresa che si era prefisso. Si noti, per inciso, che, con la confutazione dell'ipotesi dell'angolo ottuso, è stabilito che:

3) *La somma degli angoli di un triangolo non è maggiore di* 2 *angoli retti*.[1]

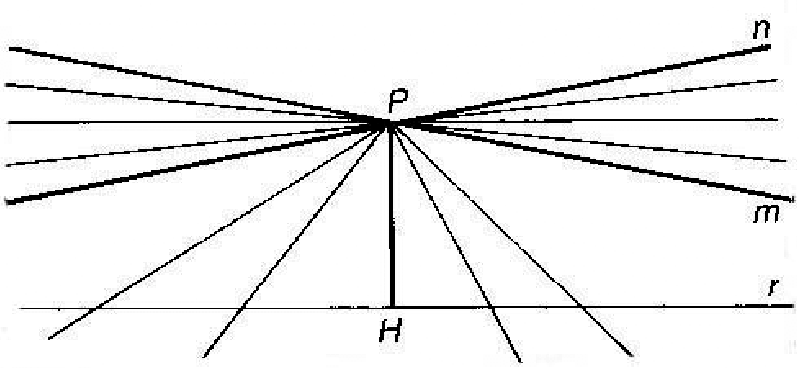
La presunta confutazione dell'ipotesi dell'angolo acuto

Giunto a questo punto Saccheri tenta di "distruggere" anche l'ipotesi dell'angolo acuto e dimostra molte proprietà che valgono in tale ipotesi con l'obiettivo di trovarvi una contraddizione. Egli si concentra prevalentemente su come si comportano le rette nell'ipotesi dell'angolo acuto. Dato che quanto ottiene non sono altro che le proprietà delle rette nella geometria iperbolica, ci soffermiamo su di esse, illustrandole in modo fruibile anche da studenti liceali.

Nell'ipotesi dell'angolo acuto non vale il V postulato, e quindi nemmeno l'unicità della parallela. Ciò significa che, dati una retta r e un punto P esterno ad essa, per il punto passano *almeno due* rette che non intersecano r. Ne segue che vi sono *infinite* rette passanti per P che non intersecano r (almeno tutte quelle comprese fra le due che abbiamo supposto esservi). Le rette per P possono allora essere divise in due classi: le *secanti* (che uniscono P con un punto di r) e le *non secanti* (parallele a r) (figura 5). È opportuno introdurre subito la nomenclatura tipica della geometria iperbolica (ovviamente assente in Saccheri): si dicono ***rette parallele** a r passanti per P* le rette che sono gli elementi di separazione fra le secanti e le non secanti e che risultano *non secanti* (le rette m e n in figura 5).
Con questa nomenclatura, vi sono *esattamente due rette passanti per P e parallele a r*. Le altre non secanti vengono dette ***iperparallele*** a r per P. Le due rette m e n sono le parallele a r *nei suoi due versi*, ossia il parallelismo è sempre relativo a uno dei due versi della retta r.

[1] Al lettore attento non sarà sfuggito che i tre risultati finora evidenziati di Saccheri coincidono con le proposizioni che, nel precedente intervento, avevamo attribuito a Legendre. La realtà è che Saccheri li ottenne prima, ma la sua opera fu dimenticata e fu riscoperta solo alla fine dell'Ottocento e, per quanto ne sappiamo, non giocò alcun ruolo significativo sulle vicende relative alla scoperta delle geometrie non euclidee. Se ora diamo ad essa notevole risalto è perché consente di pervenire con gradualità alle opere dei fondatori delle geometrie non euclidee. Legendre ottenne i tre risultati in modo diretto (senza ricorrere ai quadrilateri birettangoli isosceli) e senza conoscere Saccheri: il modo storicamente più corretto è chiamarli *teoremi di Saccheri-Legendre*.

Fig. 5

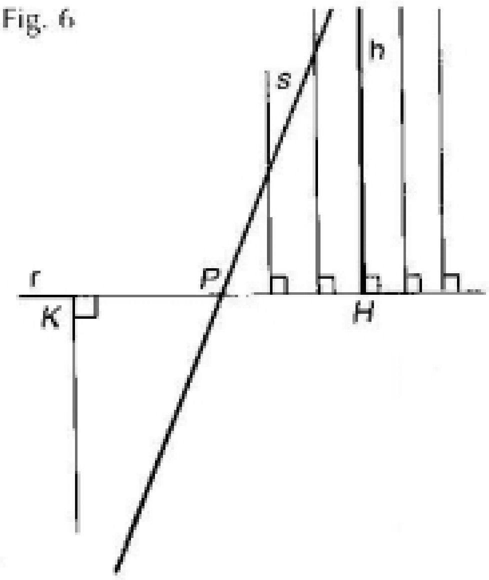


Riassumiamo schematicamente le proprietà principali delle rette.

a) **Rette secanti**

Si può dimostrare che due rette secanti *r* e *s* divergono indefinitamente a partire dal loro punto di intersezione. La differenza che si registra nella geometria iperbolica (ossia nell’ipotesi dell’angolo acuto) rispetto alla geometria euclidea (ossia all’ipotesi dell’angolo retto) è che la proiezione di una retta sull’altra non è l’intera retta, ossia le perpendicolari a *r* ad una certa distanza da *P* cessano di intersecare *s* e la prima che non interseca *s* (la *h* di figura 6) è *parallela* (secondo la definizione precedente) a *s*: la proiezione ortogonale di *s* su *r* è il segmento (aperto) *KH* avente *P* come punto medio:

Fig. 6



b) **Rette parallele**

Premettiamo alcune considerazioni alle quali va prestata particolare attenzione. Consideriamo in figura 7 due rette come *m* e *r* della figura 5 (o *s* e *h* della figura 6): *m* è per definizione la parallela a *r* passante per *P* ossia la prima delle rette per *P* che non incontrano *r* a destra:

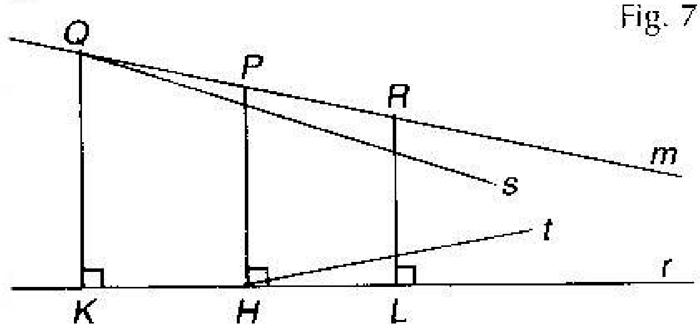


Fig. 7

Se da un punto *Q* di *m* abbassiamo la perpendicolare *QK* su *r*, si può dimostrare che *m* è anche la parallela a *r* passante per *Q* (ossia le rette come la *s* di figura 7 incontrano *r*). E lo stesso avviene se consideriamo il punto *R*. In definitiva *m* è parallela a *r* rispetto a tutti i suoi punti. Si noti che ciò non è ovvio come nella geometria euclidea in quanto le parallele non sono più definite solo come rette che non s'incontrano, ma come elementi di separazione (anzi, non si è definito "le rette *m* e *r* sono parallele se...", ma "*m* è parallela a *r* verso destra se...").

Per questa ragione non è immediato concludere che, se *m* è parallela a *r*, allora anche *r* è parallela a *m*, ossia la proprietà simmetrica del parallelismo. Per poterlo fare bisogna dimostrare che, preso un punto su *r* (ad esempio *H*), tutte le rette per *H* come la *t* incontrano *m* (ossia che *r* è la prima fra le rette per *H* che non incontrano *m*). Ebbene, ciò si può effettivamente dimostrare e quindi il parallelismo è una relazione simmetrica (e quindi d'ora in poi si può dire, come in geometria euclidea, "siano *m* e *r* due rette parallele in un verso...").

Ancora più articolato è dimostrare che due rette parallele a una terza nello stesso verso sono parallele fra loro in quel verso, e dedurne la proprietà transitiva del parallelismo.

Nelle precedenti figure 6 e 7 abbiamo tracciato le rette come avremmo fatto in geometria euclidea. D'altra parte, se prolungassimo *m*, questa finirebbe per incontrare *r*, mentre essa è non secante.

Vediamo allora come si possono tracciare due rette parallele *r* e *s* per evidenziare le proprietà che possiedono nel piano iperbolico (figura 8). In primo luogo si può dimostrare che, nel verso di parallelismo, le rette parallele si avvicinano sempre di più senza mai incontrarsi, ossia hanno, come si usa dire, un *comportamento asintotico* (avviene cioè tra le due rette quello che, in geometria euclidea, si verifica tra un'iperbole e il suo asintoto). Inoltre, nel verso opposto a quello di parallelismo, le rette *r* e *s* divergono indefinitamente, ma in modo analogo a quanto già visto a proposito delle rette secanti, non tutte le perpendicolari a una qualsiasi di esse incontrano l'altra, e ve ne è una (la *h* di figura 8), che è la prima che non incontra *s*, e quindi è parallela a *s* nell'altro verso di *s*.

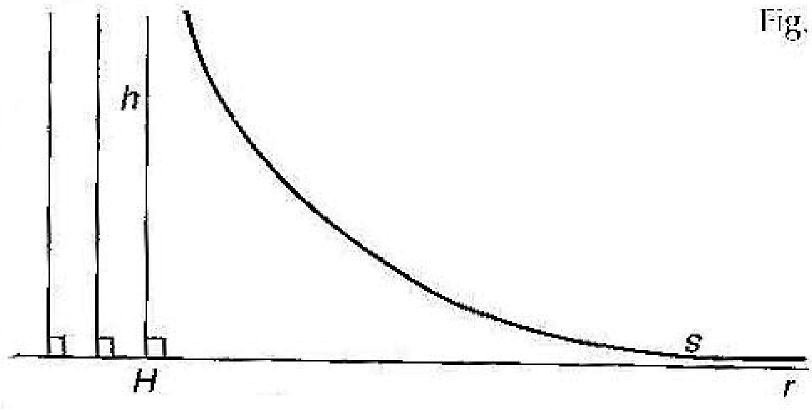


Fig. 8

Contrariamente a quanto avviene in geometria euclidea, se si proietta ortogonalmente *s* su *r* non si ottiene l'intera *r* ma una sua semiretta (in figura 8 quella di origine *H* e verso destra)

Si noti quindi che, per far risaltare nella figura le proprietà enunciate, abbiamo dovuto tracciare *s* "curva", come un ramo di iperbole. Nulla vieta di rappresentare "curva" *r* e "dritta" *s* (il parallelismo ha la proprietà simmetrica), o entrambe "curve". È l'esperienza che può aiutare a tracciare le figure in modo che risalti quanto si desidera, ma il lettore tenga presente anche nel seguito che esse possono dare solo una visione parziale (ovviamente anche in geometria iperbolica "tutte le rette sono uguali" e non ve sono alcune "più dritte" di altre).

c) Rette iperparallele

Le rette iperparallele sono rette che non s'incontrano e tuttavia non sono parallele (in figura 5 tutte le rette comprese fra *m* e *n* sono iperparallele a *r*). Si può dimostrare che *due rette iperparallele r e s hanno una* (*e una sola*) *perpendicolare comune* la quale stacca su di esse il segmento di minima distanza. A partire da tale perpendicolare comune le distanze aumentano indefinitamente in entrambi i versi e, come nei casi precedenti, le perpendicolari innalzate ad esempio su *r*, ad un certo punto non incontrano *s*. La situazione è descritta in figura 9 in cui *PH* è il segmento di minima distanza (o, se si vuole "democraticamente" non tracciare *r* "dritta" e *s* "curva", in figura 10): la proiezione ortogonale di *s* su *r* è il segmento *KL* avente *H* come punto medio:

Fig. 9

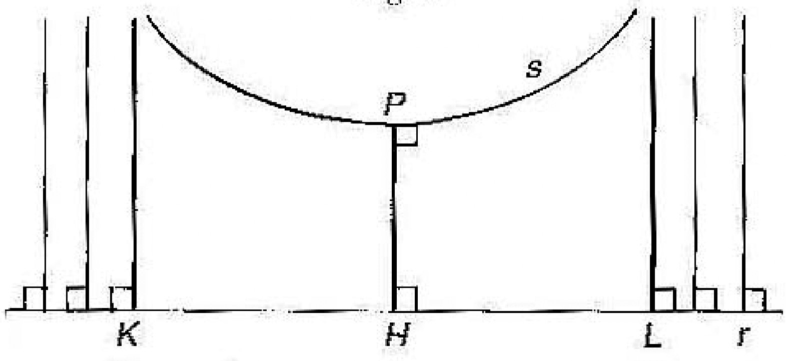
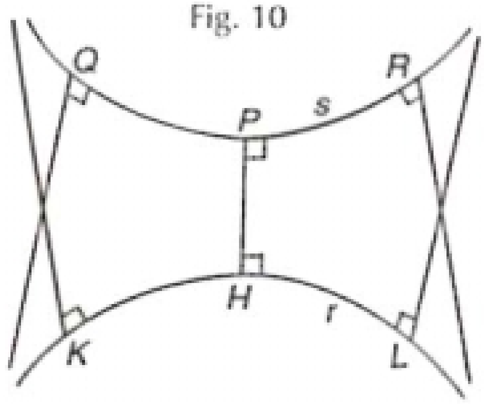


Fig. 10



Conclusione

Riprendiamo ora il discorso su Saccheri, interrotto nel momento in cui, confutata l'ipotesi dell'angolo ottuso, il gesuita ligure iniziava a confutare anche quella dell'angolo acuto. Senza entrare in troppi dettagli, Saccheri dimostrò come si comportano le rette nell'ipotesi dell'angolo acuto, e, in particolare, che esistono rette che hanno un comportamento asintotico (ossia le rette "parallele" della figura 8). Egli enuncia allora la Proposizione 33: «L'ipotesi dell'angolo acuto è assolutamente falsa, perché ripugna alla natura della linea retta». Se si confronta con l'enunciato della Proposizione 14, balza evidente che Saccheri non dice «distrugge se stessa», ossia che non si trova di fronte a una vera e propria contraddizione, ma a qualcosa di contrario all'intuizione, e ciò non può costituire affatto, dal punto di vista logico, la "confutazione dell'ipotesi dell'angolo acuto".

In definitiva, nell'opera di Saccheri troviamo i primi teoremi della geometria iperbolica, seppur dimostrati al fine di ottenere una prova della sua contraddittorietà.

A questo punto si può riprendere il filo storico segnalando le tappe della svolta avvenuta all'inizio dell'Ottocento: alcuni studiosi maturarono la convinzione che la geometria che si ottiene negando il V postulato, ossia la geometria iperbolica, relativa all'ipotesi dell'angolo acuto di Saccheri, non fosse contraddittoria. Si potrebbero citare le opere dei precursori delle geometrie non euclidee (F.K. Schweikart (1780-1857), F.A. Taurinus (1794-1874)), soffermarsi sulle lettere e sui contributi di K.F. Gauss (1777-1855) e narrare le vicende dei due veri e propri "fondatori" della geometria iperbolica, Nikolaj Ivanovič Lobačevskij (1792-1856) e János Bolyai (1802-1860). Non riteniamo tuttavia necessario in questa sede esporre questi aspetti storici, ampiamente trattati, oltre che nei volumi già citati, nei testi di storia della matematica. Può invece essere opportuno far rilevare i due problemi che rimanevano aperti.

In primo luogo, come emerge anche da quanto esposto in precedenza, la geometria iperbolica si presenta alquanto "strana" e complessa, e quindi non appare sufficiente un atto di "fede" nella sua coerenza. In altri termini, la maggior parte dei matematici hanno continuato a lungo a ritenere che prima o poi qualcuno sarebbe riuscito a pervenire all'obiettivo fallito da Saccheri, vale a dire a confutare rigorosamente l'ipotesi dell'angolo acuto.

In secondo luogo, anche ammessa la coerenza della geometria iperbolica, quale può essere il ruolo di una teoria che, come testimoniano le figure tracciate in precedenza (e quelle che vedremo nel prossimo intervento), sembrano prive di una qualsiasi applicazione alla realtà dello spazio? Se nell'esperienza è vera la geometria euclidea, quella iperbolica è falsa e quindi che senso ha accettare una teoria falsa?

Questi problemi saranno ripresi nei prossimi interventi.