

# LE GEOMETRIE NON EUCLIDEE FRA CULTURA, STORIA E DIDATTICA DELLA MATEMATICA

Dario Palladino  
(Università di Genova)

## Quarta parte La geometria iperbolica e la sua coerenza

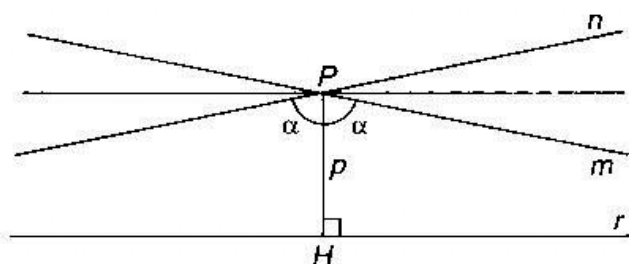
### Premessa

Nel precedente intervento, commentando l'opera di Saccheri, abbiamo avuto modo di illustrare il comportamento delle rette nella geometria iperbolica. Ci proponiamo ora di esaminare qualche altra proprietà del piano iperbolico. Ci serviremo spesso del fatto che in geometria iperbolica vale non solo la negazione del V postulato, ma anche la negazione di tutte le proposizioni ad esso equivalenti che abbiamo incontrato in precedenza.

### Angolo di parallelismo e triangoli aperti

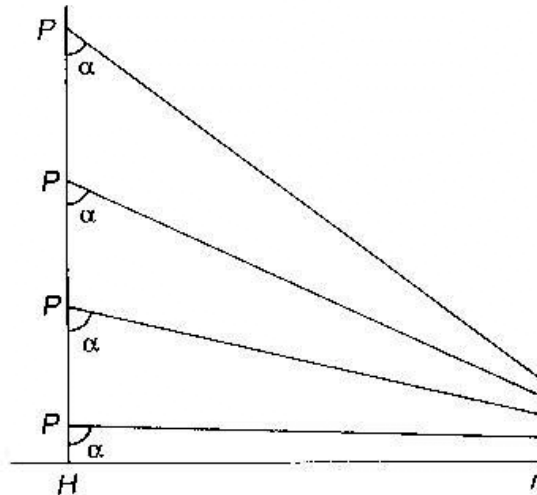
Riprendiamo in esame in figura 1 la situazione tipica della geometria iperbolica in cui, dati nel piano una retta  $r$  e un punto  $P$ , per il punto  $P$  passano esattamente due rette  $m$  e  $n$  parallele a  $r$  nei suoi due versi. Tali rette, che separano le secanti dalle iperparallele, formano con  $PH$  due angoli acuti uguali, detti *angoli di parallelismo* di  $P$  rispetto a  $r$ .

Fig. 1



Si può dimostrare che l'ampiezza  $\alpha$  dell'angolo di parallelismo è funzione della lunghezza  $p$  del segmento  $PH$  (ossia, se si considera un'altra retta  $s$  e un punto  $Q$  tale che il segmento di perpendicolare  $QK$  abbassato da  $Q$  su  $s$  sia uguale a  $PH$ , allora l'angolo di parallelismo di  $Q$  rispetto a  $s$  è uguale a quello di  $P$  rispetto a  $r$ ). Inoltre, si può dimostrare che, al diminuire di  $p$ , l'angolo di parallelismo cresce tendendo all'angolo retto se  $p$  tende a zero, mentre, al crescere di  $p$ , l'angolo di parallelismo diminuisce tendendo a zero al tendere di  $p$  all'infinito (figura 2). L'angolo  $\alpha$  assume quindi tutti i valori compresi (strettamente) fra zero e l'angolo retto. Si può dire che, più  $P$  è vicino a  $r$ , più si assottiglia il fascio delle iperparallele a  $r$  per  $P$  (che però in ogni caso è sempre infinito) e aumenta quello delle secanti e, viceversa, più  $P$  è lontano da  $r$  più aumenta il fascio delle iperparallele e si assottiglia quello delle secanti.

Fig. 2



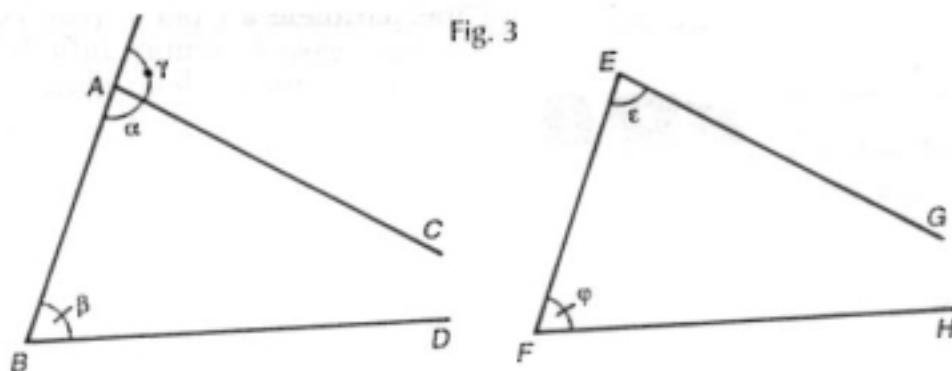
È importante rilevare che, se  $P$  tende ad  $H$ , l'angolo di parallelismo  $\alpha$  tende all'angolo retto  $R$ . Ciò significa che la differenza fra  $R$  e  $\alpha$  diviene minore di un qualsiasi valore prefissato, piccolo a piacere. Questa proprietà si può esprimere dicendo che “*in zone piccole del piano iperbolico vale la geometria euclidea*”. Le figure della geometria iperbolica hanno proprietà che, diminuendo le distanze, tendono a coincidere con quelle della geometria euclidea. Ciò consente di considerare da una diversa angolazione l'applicabilità della geometria iperbolica allo spazio fisico. Nelle figure della nostra esperienza quotidiana sembra valida la geometria euclidea. Si può comunque ipotizzare che nel nostro spazio valga la geometria iperbolica, e che le figure con le quali abbiamo a che fare siano quelle “piccole” in cui non si può sperimentalmente registrare una differenza fra le due geometrie<sup>1</sup>.

### Triangoli aperti

Le dimostrazioni delle proprietà dell'angolo di parallelismo e di molte altre si basano sulla considerazione di figure tipiche della geometria iperbolica, dette *triangoli aperti*, costituite da un segmento  $AB$  (*lato finito*)

<sup>1</sup> Chiariamo ulteriormente questo importante aspetto. Quando tracciamo un quadrilatero birettangolo isoscele, i due angoli non retti per ipotesi ci appaiono anch'essi retti. Ma è chiaro che non possiamo percepire o misurare una differenza di, ad esempio, un milionesimo di grado. In altri termini, tali angoli potrebbero essere acuti, ma indistinguibili sperimentalmente da angoli retti. Il punto è che l'espressione “zone piccole” non è quantificabile in base a considerazioni geometriche. Le figure “strane” con segmenti e rette “curvi” che abbiamo già incontrato e che vedremo più avanti potrebbero essere realistiche “su vasta scala”. Queste considerazioni, che non hanno la pretesa di essere esaustive e sulle quali torneremo nel prossimo intervento, dovrebbero comunque essere sufficienti per convincere che non si può liquidare la geometria iperbolica sulla base della sua “inapplicabilità”: come a livello atomico valgono leggi fisiche diverse da quelle classiche, così la geometria delle grandi distanze potrebbe essere diversa da quella che ci appare nelle piccole.

e da due semirette  $AC$  e  $BD$  di origini rispettivamente  $A$  e  $B$  e parallele fra loro che formano con  $AB$  gli angoli  $\alpha$  e  $\beta$  (figura 3).



I triangoli aperti della geometria iperbolica godono di molte delle proprietà dei triangoli della geometria euclidea. Ad esempio: “La somma dei due angoli interni del triangolo aperto è minore di due retti ( $\alpha + \beta < 2R$ ) e un angolo esterno è maggiore dell’angolo interno non adiacente ad esso ( $\beta < \gamma$ )”; “Se due triangoli aperti hanno uguale il lato finito ( $AB = EF$ ) e uno dei due angoli ( $\alpha = \epsilon$ ), allora hanno uguale anche l’altro ( $\beta = \phi$ )”; “Se due triangoli aperti hanno uguali i due angoli ( $\alpha = \epsilon$  e  $\beta = \phi$ ), allora hanno uguale il lato finito ( $AB = EF$ )”.

Ricollegandoci a quest’ultimo teorema, ricordiamo che in geometria iperbolica non esistono triangoli simili che non siano anche uguali. Ciò significa che, se due triangoli hanno uguali i tre angoli, allora hanno uguali anche i tre lati. Pertanto, in geometria iperbolica sono valide delle relazioni tra segmenti e angoli non presenti in geometria euclidea: dati i tre angoli di un triangolo si possono determinare i lati, e, dati i due angoli di un triangolo aperto, si può determinare il lato finito. Queste relazioni (che si studiano nella trigonometria iperbolica) sono troppo complesse per essere trattate a livello di scuola secondaria. Tuttavia, i nessi fra i segmenti e gli angoli caratteristici della nuova geometria possono essere evidenziati, almeno a livello qualitativo, in riferimento a quanto prima esposto a proposito dell’angolo di parallelismo. Se si fissa un valore dell’angolo di parallelismo  $\alpha$ , resta determinata la lunghezza  $p$  del segmento  $PH$ , ossia della distanza da una retta alla quale corrisponde un angolo di parallelismo uguale ad  $\alpha$ . Anche questa, almeno a prima vista, rientra fra le “stranezze” della geometria iperbolica: alla nostra mentalità euclidea segmenti e angoli appaiono grandezze di natura differente. Gli angoli hanno la caratteristica di essere tutti confrontabili con l’angolo giro e, infatti, si può assumere come unità di misura il grado (trecentosessantesima parte dell’angolo giro). Per quanto riguarda i segmenti, invece, non vi è un segmento di riferimento, tanto è vero che le unità di misura delle lunghezze sono fissate

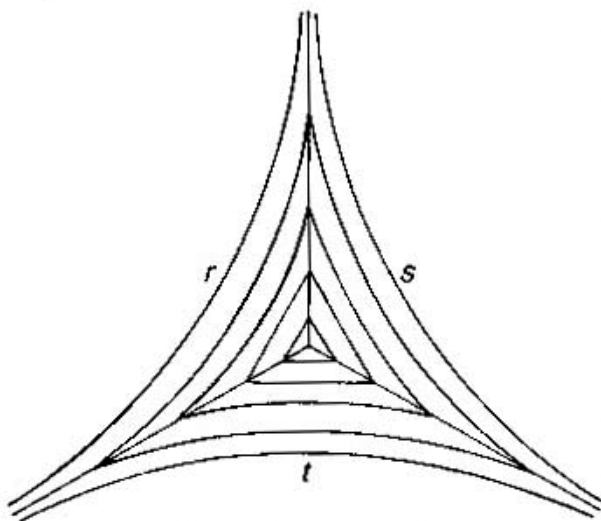
in modo convenzionale<sup>2</sup>. Questa differenza non esiste più in geometria iperbolica dove, ad esempio, si può fissare come unità di misura dei segmenti il segmento  $PH$  cui corrisponde un angolo di parallelismo di  $45^\circ$ .

### Triangoli iperbolici e triangolo limite

Diamo ora qualche cenno ad alcune proprietà dei triangoli della geometria iperbolica. Molte di esse possono essere già desunte da quanto abbiamo esposto finora in questo e nei precedenti articoli.

In primo luogo la somma degli angoli di un triangolo è minore di due retti e varia da triangolo a triangolo. Si può dimostrare che esistono triangoli la cui somma degli angoli interni assume un valore qualsiasi compreso fra zero e due retti. Per illustrare come ciò possa accadere consideriamo un triangolo equilatero e vediamo cosa succede all'aumentare del lato (figura 4).

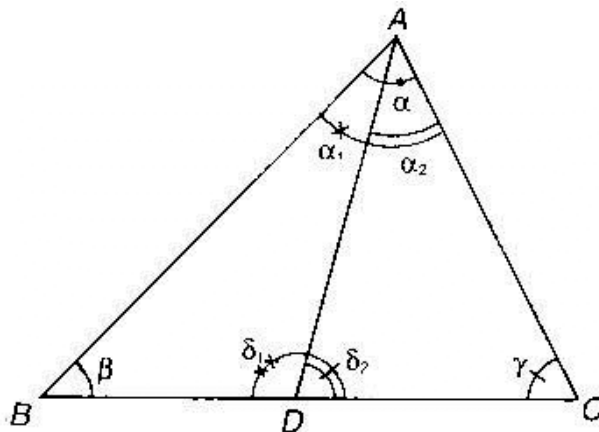
Fig. 4



Per quanto detto in precedenza, più il triangolo è “piccolo”, più assomiglia a un triangolo euclideo, per cui i suoi angoli hanno valore prossimo a  $60^\circ$  (e la somma degli angoli interni tende a  $180^\circ$ ). Più il lato aumenta, più l'angolo diminuisce (e nella figura, per rendere visibile questa circostanza, abbiamo “incurvato” i lati). L'angolo diviene sempre più piccolo e tende a zero e il triangolo si approssima sempre di più alla figura formata dalle tre rette  $r$ ,  $s$  e  $t$  parallele a due a due in un verso e detta *triangolo limite*. In sostanza, anche se i lati aumentano indefinitamente, l'area del triangolo, pur crescendo, non aumenta indefinitamente, ma è superiormente limitata da quella del triangolo limite.

<sup>2</sup> Per essere più chiari, a Parigi vi è il “metro campione” di riferimento, ma non vi è alcuna necessità di predisporre un “campione” per misurare gli angoli.

Questa importante circostanza può essere dimostrata con un semplice ragionamento. In geometria iperbolica, come si è detto, la somma  $S$  degli angoli di un triangolo è minore di  $2R$ . Si definisce *difetto angolare* di un triangolo la differenza  $d = 2R - S$ . Si dimostra facilmente che il difetto angolare gode della proprietà additiva: se un triangolo è diviso in due triangoli da una trasversale, il suo difetto angolare è la somma dei difetti angolari  $d_1$  e  $d_2$  dei due triangoli componenti. Infatti (figura 5):



essendo:

$$d = 2R - \alpha - \beta - \gamma \quad d_1 = 2R - \alpha_1 - \beta - \delta_1 \quad d_2 = 2R - \alpha_2 - \gamma - \delta_2$$

e tenendo conto che  $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$  e  $\delta_1 + \delta_2 = 2R$ , si ha:

$$\begin{aligned} d_1 + d_2 &= 2R - \alpha_1 - \beta - \delta_1 + 2R - \alpha_2 - \gamma - \delta_2 \\ &= 4R - \alpha - \beta - \gamma - 2R = 2R - \alpha - \beta - \gamma = d. \end{aligned}$$

L'additività del difetto angolare ha come conseguenza che in geometria iperbolica l'area  $A$  di un triangolo è proporzionale al difetto angolare; detta  $k^2$  la costante di proporzionalità, si ha:

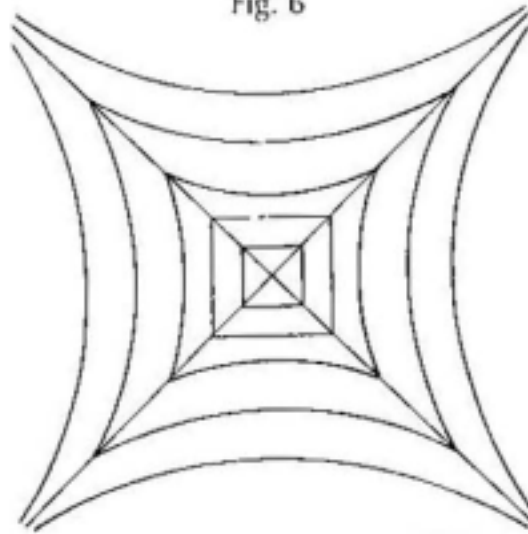
$$A = k^2 \cdot (2R - \alpha - \beta - \gamma).$$

Se ora si osserva che, per definizione, il difetto angolare è superiormente limitato ( $d \leq 2R$ ), ne segue che lo è anche l'area dei triangoli. A differenza di quanto accade in geometria euclidea, in geometria iperbolica l'area dei triangoli non cresce a piacere, ma è superiormente limitata (e l'estremo superiore è  $k^2 \cdot 2R$ , pari all'area dei triangoli limite).

Inoltre, partendo da un triangolo di difetto  $d$  e sfruttando l'additività del difetto angolare, è facile determinare un triangolo di difetto angolare maggiore, e poi uno di difetto ancora maggiore, fino a che il difetto si approssima (dal basso) a  $2R$ , e quindi con la somma degli angoli interni che tende a zero.

Quanto esposto può essere esteso al caso dei poligoni. Vediamo cosa capita a proposito dei quadrati. In geometria iperbolica un quadrato è definito come un quadrilatero con i quattro lati uguali e i quattro angoli uguali (e gli angoli evidentemente non sono retti). Per tracciare dei quadrati basta considerare due rette perpendicolari e unire quattro punti equidistanti dal loro punto di intersezione (figura 6).

Fig. 6



Più il lato è corto, più il quadrato tende a quello euclideo con quattro angoli retti. Al crescere del lato l'angolo del quadrato diminuisce tendendo a zero. Il quadrato limite è costituito dalle quattro rette parallele alle rette perpendicolari iniziali. Detto  $\alpha$  l'angolo del quadrato, il suo difetto angolare è  $4R - 4\alpha$  e l'area risulta  $k^2 \cdot (4R - 4\alpha)$ . *L'area dei quadrati è superiormente limitata da  $k^2 \cdot 4R$ , che è l'area del quadrato limite*<sup>3</sup>.

Osserviamo ancora che, a differenza di quanto avviene in geometria euclidea in cui il rapporto fra la diagonale e il lato di un quadrato è costante e uguale a  $\sqrt{2}$ , in geometria iperbolica tale rapporto non è affatto costante, ma variabile. Più precisamente, tale rapporto tende a  $\sqrt{2}$  quando il lato del quadrato tende a zero (in zone "piccole" del piano iperbolico vale la geometria euclidea) e diminuisce al crescere del lato. Quando il lato tende all'infinito il rapporto tende a 1 (come emerge dalla figura 6, diagonale e lato tendono a divenire linee rette e quindi il loro rapporto converge a 1). Pertanto, il rapporto fra diagonale e lato di un quadrato assume tutti i valori compresi (strettamente) fra 1 e  $\sqrt{2}$ . Dato che fra 1 e  $\sqrt{2}$  vi sono infiniti numeri razionali, *vi sono infiniti quadrati in cui la diagonale è commensurabile col lato* (ad esempio vi sono quadrati in cui la diagonale è  $4/3$  oppure  $5/4$  del lato).

Quanto finora esposto dovrebbe essere sufficiente a illustrare che la geometria iperbolica non è un miscuglio di "stranezze", ma una vera e propria teoria geometrica, più complessa della geometria euclidea dato che in essa le figure usuali hanno un comportamento più "variabile". Altri

<sup>3</sup> Se si ricorda che il limite superiore dell'area dei triangoli è  $k^2 \cdot 2R$ , si può concludere che, in geometria iperbolica, vi sono dei quadrati (quelli con area compresa fra  $k^2 \cdot 2R$  e  $k^2 \cdot 4R$ ) che non sono contenuti in alcun triangolo.

aspetti potrebbero essere trattati o accennati. Ad esempio: in geometria iperbolica il luogo dei punti equidistanti da una retta non è una retta, ed è una nuova linea, detta *iperciclo*, con interessanti proprietà geometriche.

### **La coerenza della geometria iperbolica e il metodo dei modelli**

Bisogna ora dedicare un certo spazio al problema della coerenza della geometria iperbolica. Il fatto che alcuni studiosi avessero maturato nella prima metà dell'Ottocento la convinzione di tale coerenza non implica che questa loro opinione potesse essere facilmente condivisa. I precursori e i fondatori della geometria iperbolica, tra l'altro, erano figure di secondo piano nel mondo matematico.

Una svolta si registrò con la pubblicazione postuma dell'epistolario di Gauss, nel quale emergeva come uno dei massimi matematici di tutti i tempi, pur non avendo pubblicato niente sull'argomento, avesse sviluppato in modo notevole la geometria iperbolica e fosse convinto della sua coerenza. D'altra parte, una cosa è essere convinti della coerenza di una teoria, ben altra cosa è ritenerla una teoria matematica legittima, dotata di quei requisiti di verità assoluta che fino ad allora accompagnavano le discipline matematiche rendendole lo strumento principale per la comprensione del mondo. L'accettazione delle geometrie non euclidee<sup>4</sup> avvenne in modo storicamente complesso ed è opportuno limitarsi ad alcune considerazioni di carattere generale.

Di fatto, nella seconda metà dell'Ottocento alcuni studiosi di primo piano trovarono delle significative applicazioni matematiche della geometrie non euclidee: E. Beltrami (1835-1899) alla geometria differenziale delle superfici, F. Klein (1848-1925) alla geometria proiettiva e H. Poincaré (1854-1912) alla teoria delle funzioni di variabile complessa. In seguito, con l'affermarsi della concezione moderna dell'assiomatica, queste applicazioni furono rielaborate come veri e propri "modelli" delle geometrie euclidee e il problema della loro coerenza fu risolto in modo definitivo.

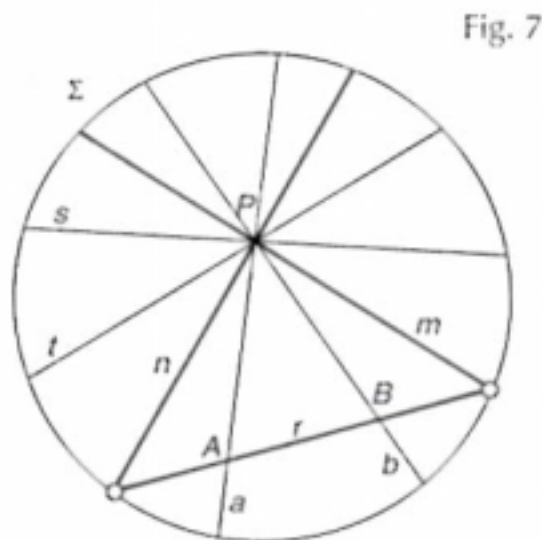
Tralasciando le considerazioni storiche e ritornando agli aspetti didattici è bene sottolineare come il problema della coerenza fosse un problema nuovo e di natura peculiare. In precedenza abbiamo rilevato come al suo apparire la geometria iperbolica non avesse destato particolare interesse. Molti ritenevano che, prima o poi, qualcuno avrebbe trovato in essa una contraddizione. In precedenza abbiamo visto come Saccheri avesse confutato "l'ipotesi dell'angolo ottuso", mancando però l'obiettivo di confutare "l'ipotesi dell'angolo acuto" (ossia la geometria iperbolica). Come si può essere sicuri che qualcuno non riesca dove Saccheri aveva fallito? Si noti la "dissimmetria" delle due situazioni: per "confutare" un'ipotesi basta esibire la dimostrazione che da essa segue una contraddizione; per dimostrare che un'ipotesi "non è confutabile" bisogna

<sup>4</sup> Come vedremo nel prossimo intervento la geometria iperbolica fu affiancata dall'altra geometria non euclidea, la *geometria ellittica*, e per questo si può parlare al plurale di *geometrie non euclidee*.

far vedere che da essa non potrà mai seguire una contraddizione. Evidentemente il secondo problema è di natura assai diversa dal primo, in quanto il suo “oggetto” sono tutte le possibili conseguenze dell’ipotesi (anche quelle non ancora escogitate). Il problema della coerenza è “nuovo” poiché, secondo la concezione classica dell’assiomatica, gli assiomi dovevano essere “veri di per sé”: deducendo logicamente da proposizioni vere si ottengono sempre proposizioni vere, e quindi non si può ottenere una contraddizione (che è una proposizione falsa). Ma, nel caso della geometria iperbolica, chi si sentirebbe di sostenere che è “vera”? Ebbene, il metodo dei modelli consiste proprio in questo: far vedere che, a proposito di certi enti, gli assiomi di una teoria sono veri. Per la geometria iperbolica tali enti si possono rinvenire all’interno della stessa geometria euclidea, e per questo si parla di “modelli euclidei della geometria iperbolica”.

### Il modello di Klein

Sia  $\Sigma$  una circonferenza euclidea. Chiamiamo I-punti e I-rette i punti e le rette della geometria iperbolica. Interpretiamo gli I-punti nei punti euclidei interni a  $\Sigma$  e le I-rette nelle corde di  $\Sigma$  (estremi esclusi). Diciamo che un I-punto  $P$  appartiene a una I-retta  $r$  se e solo se il punto euclideo associato a  $P$  appartiene alla corda di  $\Sigma$  associata a  $r$ . In questa interpretazione la figura 1 assume l’aspetto di figura 7. Si vede immediatamente che nel “modello” è vero l’assioma “Per due I-punti passa una ed una sola I-retta” (in quanto vi è una ed una sola corda che unisce due punti interni a una circonferenza) e che non vale l’unicità della parallela (dati un punto interno a  $\Sigma$  e una corda non passante per il punto, vi sono infinite corde che passano per il punto e non incontrano la corda data). In figura sono tracciate le I-parallele  $m$  e  $n$  a  $r$  passanti per  $P$  le quali risultano gli elementi di separazione fra le I-secanti (quali  $a$  e  $b$ ) e le I-iperparallele (quali  $s$  e  $t$ ).



Si può provare rigorosamente che, interpretando in modo opportuno le relazioni di uguaglianza tra segmenti e angoli, tutti gli assiomi della

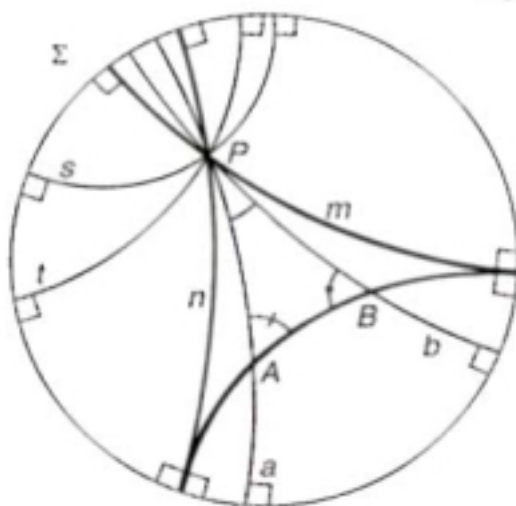
geometria iperbolica sono veri nel modello. Quindi, se vi fosse una contraddizione nella geometria iperbolica, questa stessa contraddizione risulterebbe dimostrabile a proposito degli enti del modello, ossia, in definitiva, sarebbe una contraddizione nella stessa geometria euclidea: *se la geometria euclidea è coerente, allora lo è anche la geometria iperbolica*.

Il modello di Klein consente di visualizzare facilmente le rette secanti, parallele e iperparallele. Tuttavia, dal punto di vista didattico, presenta due difetti. Il primo è che le I-rette sono interpretate in segmenti aperti (corde) di lunghezza (euclidea) finita variabile e minore del diametro di  $\Sigma$ . Dato che le rette della geometria iperbolica sono tutte “uguali” fra loro e di lunghezza infinita, bisogna introdurre una “metrica” opportuna che consenta di misurare i segmenti in modo che siano rispettate le relazioni della geometria iperbolica. Il secondo è che un analogo discorso vale per gli angoli: ad esempio l’I-triangolo  $PAB$  di figura 7 coincide con un triangolo euclideo interno a  $\Sigma$  e quindi, dato che la I-somma degli angoli deve essere minore di due retti, la I-misura degli angoli deve essere diversa da quella euclidea. In sintesi, nel modello di Klein non si “vedono” i segmenti e gli angoli uguali.

### Il modello di Poincaré

Nel modello di Poincaré si elimina il secondo dei difetti del modello di Klein interpretando le I-rette in modo alquanto più complesso, ma consentendo di realizzare una rappresentazione più simile a quella delle figure tracciate in precedenza per illustrare le proprietà della geometria iperbolica. Come prima, interpretiamo gli I-punti nei punti interni a una circonferenza euclidea  $\Sigma$ . Interpretiamo poi le I-rette nei diametri di  $\Sigma$  e negli archi di circonferenza ortogonali a  $\Sigma$ . La figura 8 è la corrispettiva nel modello di Poincaré della figura 7 del modello di Klein.

Fig. 8



Nel modello di Poincaré le rette sono rappresentate da linee curve e gli angoli si misurano come in geometria euclidea (l'angolo tra due curve in un punto è per definizione l'angolo fra le tangenti alle curve nel punto) e quindi, ad esempio, è "visibile" come nell'I-triangolo  $PAB$  la somma degli angoli interni sia minore di due retti. In figura 9 sono rappresentati triangoli via via più "grandi" e  $TRS$  è un I-triangolo limite (tale figura corrisponde alla figura 4 precedente). In figura 10 è rappresentato un quadrilatero birettangolo isoscele la cui base è sul diametro di  $\Sigma$ .

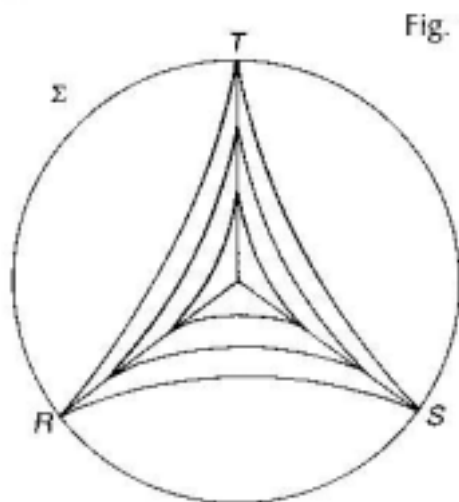


Fig. 9

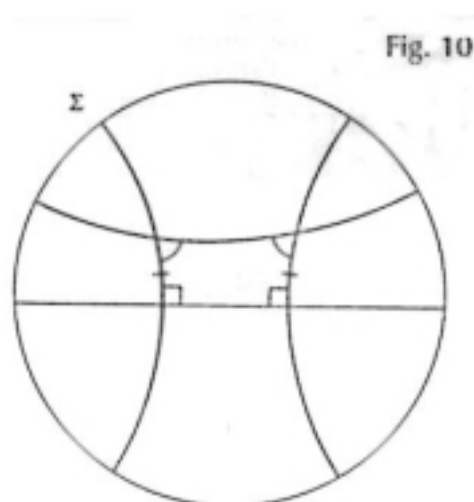


Fig. 10

Rinviando ai testi già citati per ulteriori dettagli (soprattutto per quanto riguarda il tracciamento delle figure nel modello di Poincaré) ribadiamo che, come per il modello di Klein, si può dimostrare che nel modello di Poincaré valgono tutti gli assiomi della geometria iperbolica.

In conclusione, la geometria iperbolica, che si fonda sulla negazione del V postulato, è coerente (se lo è la geometria euclidea; ma questo non è mai stato messo in dubbio). Pertanto: il V postulato è indimostrabile nella geometria assoluta: se il V postulato fosse dimostrabile non potrebbe esistere un modello, come quelli di Klein e Poincaré, in cui sono veri gli assiomi della geometria assoluta e il V postulato falso.