LE GEOMETRIE NON EUCLIDEE FRA CULTURA, STORIA E DIDATTICA DELLA MATEMATICA

Dario Palladino
(Università di Genova)

Quinta parte
La geometria ellittica e considerazioni conclusive

Premessa

Riassumiamo sinteticamente quanto è finora emerso dai nostri precedenti interventi sulle geometrie non euclidee. Secondo i canoni della concezione classica (aristotelica) dell'assiomatica, i principi di una teoria scientifica devono essere "evidenti". Ebbene, il V postulato degli *Elementi* di Euclide non è stato ritenuto avere tale requisito necessario per essere assunto tra le proposizioni primitive (e, come abbiamo documentato, questa sembra essere stata l'opinione dello stesso Euclide). Per questa ragione, molti matematici hanno cercato di dimostrarlo a partire dai restanti assiomi, ossia nell'ambito della *geometria assoluta*. Nell'Ottocento, visto il fallimento di tali molteplici tentativi, è lentamente maturata la convinzione che il V postulato fosse indimostrabile. Che le cose stiano effettivamente così è ormai assodato: i "modelli euclidei" della geometria iperbolica assicurano al contempo l'indimostrabilità del V postulato nella geometria assoluta e la coerenza (relativa alla geometria euclidea) della geometria iperbolica. Di quest'ultima abbiamo esaminato alcune caratteristiche, in sostanza quanto ci è parso sufficiente per far vedere che si tratta di una vera e propria "nuova" teoria geometrica.

È giunto il momento di rivolgerci all'altra geometria non euclidea, ossia alla *geometria ellittica*. Segnaliamo subito che questa solleva, per ragioni che emergeranno nel seguito, problemi ancora più ardui della geometria iperbolica. Suggeriamo quindi un percorso che capovolge quello intrapreso per quest'ultima, e in cui i "modelli" vengono ad avere un ruolo prioritario; per rendere il discorso didatticamente più semplice, faremo precedere la trattazione della geometria ellittica da quella di un'altra geometria ad essa strettamente affine, detta *geometria sferica*.

La geometria sferica

Osserviamo subito che le geometrie sferica ed ellittica corrispondono all'ipotesi dell'angolo ottuso di Saccheri e sono caratterizzate dall'assioma, detto spesso, per ragioni storiche sulle quali possiamo sorvolare, *assioma di Riemann*, in base al quale: «Tutte le coppie di rette si intersecano», oppure: «Non esistono rette parallele». In esse valgono teoremi quali "La somma degli angoli interni di un triangolo è maggiore di due retti"; "In un quadrilatero $ABCD$ birettangolo in A e B e isoscele ($AD = BC$), gli angoli in C e D sono ottusi e $CD < AB$"; "L'angolo inscritto in una semicirconferenza è ottuso".

Come si possono conciliare queste proprietà col fatto che, come si è visto, si può confutare l'ipotesi dell'angolo ottuso? Nella geometria assoluta si può dimostrare che esistono rette parallele (Proposizione 31 degli *Elementi di Euclide*) e che la somma degli angoli di un triangolo non può superare due retti (*Teorema di Saccheri-Legendre*). Pertanto, se si aggiunge l'assioma di Riemann o l'ipotesi dell'angolo ottuso agli assiomi della geometria assoluta si ottiene una teoria *contraddittoria*. Se si vuole costruire una geometria coerente nella quale si assume l'assioma di Riemann occorre modificare, oltre al V postulato, qualche altro assioma della geometria assoluta[1]. D'altra parte, stabilire a priori quali modifiche operare, auspicabilmente nel minor numero possibile, è impresa assai ardua: se la geometria iperbolica si ottiene semplicemente sostituendo nella geometria euclidea il V postulato con la sua negazione, le geometrie sferica ed ellittica hanno un sistema di assiomi più complesso. Tuttavia, se si adopera opportunamente il metodo dei modelli, si può aggirare l'ostacolo e presentare le nuove geometrie con molta naturalezza.

Vediamo prima la geometria sferica. Come è noto, noi viviamo su una superficie che possiamo assimilare a una sfera. Supponiamo di agire restando sopra la superficie della sfera e, per ora, in una porzione non troppo vasta di essa, tale da non contenere due punti diametralmente opposti. Siano *A* e *B* due punti qualsiasi e supponiamo di voler andare da *A* a *B* percorrendo il tragitto più breve possibile. Si può dimostrare che la linea di minima distanza è l'*arco di circonferenza massima* ottenuta intersecando la sfera col piano passante per *A*, *B* e per il centro *O* della sfera (figura 1). Questi archi di circonferenza massima rivestono, per gli abitanti sulla superficie, il ruolo dei segmenti della geometria euclidea. Ad esempio, *ABC* e *PAB* sono "triangoli" i cui lati sono archi di circonferenze massime.

Fig. 1

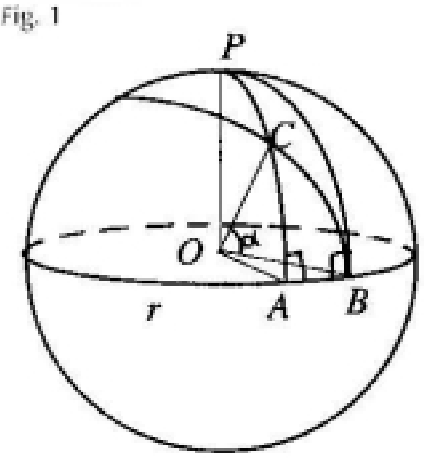
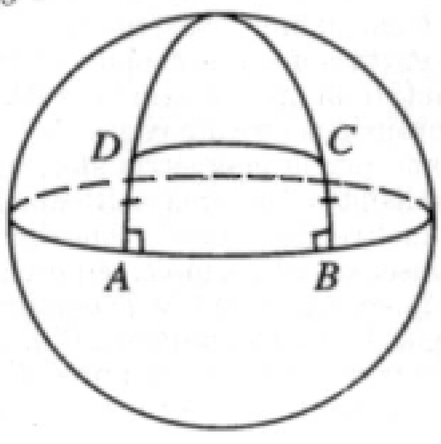


Fig. 2



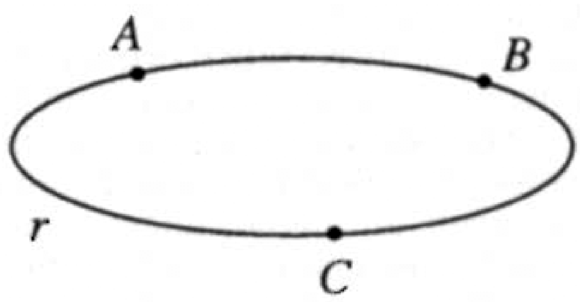
In figura 2 è rappresentato un quadrilatero birettangolo isoscele: gli angoli in *A* e *B* sono retti in quanto i meridiani sono perpendicolari all'equatore e gli archi *AD* e *CB* sono uguali. In figura 1 è evidente come la

[1] Non si deve essere più in grado di poter dimostrare la Proposizione 16 degli *Elementi* di Euclide dalla quale segue l'esistenza di rette parallele, ossia la Proposizione 31.

somma degli angoli interni del "triangolo" *PAB* sia maggiore di due retti (in quanto sono già retti i due angoli in *A* e in *B*). Si noti anche che, contrariamente a quanto avviene in geometria euclidea, le due "perpendicolari" alla "retta" *r* in *A* e *B* si intersecano in *P*. Nel quadrilatero birettangolo isoscele di figura 2 appare chiaramente che gli angoli in *C* e *D* sono ottusi e che il lato *CD* è minore del lato *AB*[2].

Sulla sfera, quindi, si "realizza" l'ipotesi dell'angolo ottuso, la quale non può quindi essere di per sé fonte di contraddizioni. Pertanto, essa è in contraddizione con uno o più assiomi della geometria assoluta. Avendo presente il modello della sfera, non è difficile vedere quali. Se guardiamo l'intera sfera balza evidente che le "rette" circonferenze massime, a differenza delle rette euclidee, (a) sono linee chiuse e (b) per due punti estremi di un diametro della sfera passano infinite "rette" (per due punti diametralmente opposti come i poli passano infiniti meridiani). La proprietà (b) va contro uno degli assiomi fondamentali della geometria di Euclide: «Per due punti distinti passa una ed una sola retta». Per quanto riguarda la (a), essa viola l'infinità della retta e il fatto che la retta euclidea è una linea aperta. A proposito di quest'ultimo punto si può cogliere l'occasione per segnalare che Euclide non ha messo fra i postulati alcune proposizioni che di fatto ha impiegato negli *Elementi*, tra cui ad esempio: «Dati tre punti di una retta, ve ne è uno ed uno solo che sta fra gli altri due»[3]. Come è evidente dalla figura 3, nessuno dei tre punti *A*, *B* e *C* della "retta" *r* "sta fra" gli altri due, nel senso che, partendo da uno qualsiasi di essi, si può raggiungere uno degli altri due restando sulla "retta" e senza passare per il terzo punto:

Fig. 3



[2] Si noti che l'arco *CD* non è un arco di parallelo. I paralleli sono circonferenze della geometria sferica, in quanto luogo di punti equidistanti dal polo, e non sono le linee di minima distanza (*geodetiche*) che sulla superficie corrispondono alle "rette".

[3] Questo e altri "difetti" di Euclide, non collegati con la questione del V postulato, sono stati riconosciuti solo nell'Ottocento. Non ci soffermiamo su di essi, limitandoci a segnalare che è per questa ragione che attualmente come sistema di assiomi per la geometria euclidea si fa solitamente riferimento a quello dei *Fondamenti della geometria* di David Hilbert (1862-1943).

In altre parole, sono violati quelli che, nelle trattazioni assiomatiche più recenti, sono detti *assiomi di ordinamento*.

Lasciando cadere gli assiomi euclidei che non sono soddisfatti e sostituendoli opportunamente, si ottiene la *geometria sferica*, di cui, come dice il nome, la superficie della sfera è un “modello” (interpretando le “rette” con le circonferenze massime). In particolare, è verificato l’assioma di Riemann in quanto due “rette” qualsiasi si intersecano sempre, per cui non esistono rette “parallele”. Tra i teoremi della geometria sferica, facilmente visualizzabili nel modello, vi sono i seguenti: “Tutte le rette hanno la stessa lunghezza finita”; “Il piano ha area finita”, “Tutte le perpendicolari a una stessa retta si incontrano in due punti”; “La somma degli angoli di un triangolo è maggiore di due retti”. Si noti anche che valgono due proprietà che abbiamo già incontrato a proposito della geometria iperbolica e che, in questo contesto, hanno un’interpretazione più immediata: “In zone piccole del piano sferico vale la geometria euclidea” (come dimostrano le difficoltà incontrate nell’accettazione del fatto che la terra non è piatta, una “piccola” porzione di sfera non è distinguibile da un piano) e, inoltre, “I segmenti hanno, al pari degli angoli, un’unità di misura naturale” (l’intera retta è come un angolo giro)[4]. Un teorema ben noto di geometria della sfera è che l’area A di un “triangolo” di angoli α, β e γ è data dalla formula $A = k^2 \cdot(\alpha + \beta + \gamma - 2R)$ che si può leggere, in analogia con la corrispettiva formula della geometria iperbolica: “L’area di un triangolo è proporzionale al suo eccesso angolare”. Potremmo facilmente continuare questa lista (ad esempio, ai criteri di uguaglianza dei triedri corrispondono altrettanti criteri di uguaglianza fra i “triangoli sferici”, tra cui, come in geometria iperbolica, “Se due triangoli hanno uguali gli angoli, allora sono uguali”), ma non lo riteniamo necessario in quanto, in sostanza, la *geometria sferica* corrisponde alla geometria euclidea della sfera. Lo spazio che le abbiamo dedicato è per pervenire in modo più naturale all’altra vera e propria geometria non euclidea, ossia alla *geometria ellittica*.

La geometria ellittica

Nella geometria ellittica si vuole conservare l’assioma euclideo secondo cui: «Per due punti distinti passa una ed una sola retta». L’idea è la seguente: per due punti di una sfera passa una e un sola circonferenza massima a meno che essi non siano diametralmente opposti. Riduciamo allora la sfera a una semisfera (eliminando cosi i punti diametralmente opposti a quelli della semisfera). Rimangono allora punti diametralmente opposti solo sulla circonferenza Γ che delimita la semisfera. Imponiamo allora che i punti diametralmente opposti di tale circonferenza coincidano in un unico punto, siano in sostanza “lo stesso punto” (figura 4).

[4] Come emerge dalla figura 1, si può adottare come misura di un “segmento”, quale l’arco BC, la misura del corrispettivo angolo α al centro della sfera.

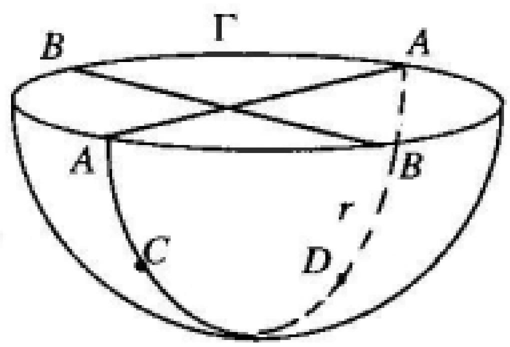


Fig. 4

Ci si convince facilmente che, dati due punti qualsiasi della semisfera, per essi passa una sola "retta" (ossia una sola semicirconferenza massima), e lo stesso avviene sia se uno dei due punti è una "coppia" di punti diametralmente opposti della circonferenza Γ che delimita la semisfera, sia se entrambi sono "coppie" di tali punti (e in questo caso la "retta" è proprio la circonferenza Γ). Come per la geometria sferica è soddisfatto l'assioma di Riemann[5] e, inoltre, le "rette" sono linee chiuse: se, ad esempio, si percorre la "retta" *r* da *C* a *D* e si prosegue fino a raggiungere Γ in *A*, ci si trova nello stesso punto diametralmente opposto e si può continuare a percorrere *r* tornando in *C* (figura 4).

Dato che nella geometria ellittica le "rette" sono linee chiuse, gli assiomi che vanno rigettati sono, come per la geometria sferica, quelli relativi all'ordinamento. Per quanto riguarda i teoremi, come emerge da quanto precede, valgono tutti quelli della geometria sferica che non coinvolgono punti diametralmente opposti, ad esempio: "Tutte le rette hanno la stessa lunghezza finita"; "Il piano ha area finita", "La somma degli angoli di un triangolo è maggiore di due retti", "In zone piccole del piano ellittico vale la geometria euclidea", "I segmenti hanno un'unità di misura naturale". Di quelli precedentemente enunciati non vale solo quello relativo alle perpendicolari a una stessa retta che va così riformulato: "Tutte le perpendicolari a una stessa retta si incontrano in un punto".

La geometria ellittica si discosta anche notevolmente dalla geometria sferica quando si considerano proprietà relative all'intero piano. Una facilmente visualizzabile nel modello è la seguente. Nelle geometrie euclidea, iperbolica e sferica vale la *proprietà di separazione del piano*: "Ogni retta divide il piano in due semipiani". Nella geometria ellittica questa proprietà non vale. Consideriamo nel piano ellittico (sulla semisfera) due punti qualsiasi *A* e *B* e una "retta" *r* come in figura 5.

[5] Vi è la differenza che nella geometria sferica due "rette" si incontrano sempre in due punti, mentre, in geometria ellittica, due "rette" si incontrano sempre in uno ed un solo punto.

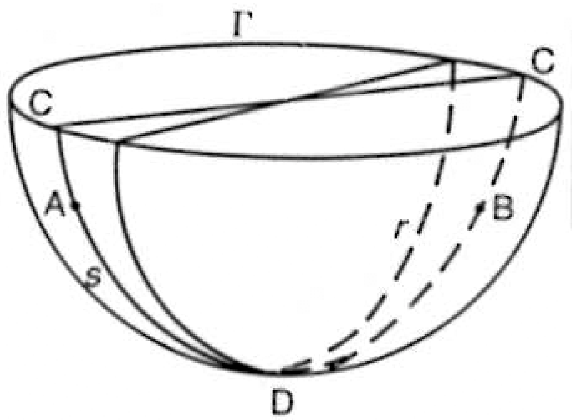


Fig. 5

Se noi consideriamo la “retta” s per A e B, che incontra Γ nel punto “coppia” C, si vede che A e B individuano su s due “segmenti”, uno che incontra r in D e l’altro (che contiene C) che non incontra r; in altre parole si può andare da A a B con due “segmenti”, uno che incontra r e l’altro che non la incontra. In una situazione come questa non si può più sostenere che la “retta” divide in due il piano. Non aggiungiamo altro in quanto possiamo ritenere raggiunto l’obiettivo di aver illustrato come sia possibile una geometria coerente in cui non esistono rette parallele e i triangoli hanno somma degli angoli superiore a due retti[6].

Sottolineiamo ancora la differenza tra i percorsi suggeriti per introdurre le due geometrie non euclidee. Per la geometria iperbolica abbiamo seguito un procedimento “tradizionale”, proponendo alcuni teoremi significativi che seguono dagli assiomi (che sono quelli della geometria assoluta più la negazione del V postulato), aiutandoci col fatto che sono teoremi le negazioni di tutte le proposizioni equivalenti al V postulato incontrate nella rassegna dei tentativi di dimostrarlo. Solo alla fine abbiamo concentrato la nostra attenzione sul problema della coerenza della geometria iperbolica, indicando come essa possa essere ottenuta mediante “modelli”. Per la geometria ellittica (e sferica) non abbiamo elencato gli assiomi, ma abbiamo presentato subito un “modello” che assicura la coerenza della teoria e, per quanto riguarda i teoremi, ci siamo accontentati di enunciarne alcuni e di vedere che sono verificati nel modello.

[6] A titolo di curiosità osserviamo che sia nella geometria sferica, sia in quella ellittica non si può dimostrare la Proposizione 16 degli *Elementi* di Euclide, perché (si veda la figura 1 del primo intervento), essendo la retta una linea chiusa, non è più detto che, unendo E con B, l’angolo $C\hat{B}E$ sia una parte di δ (il punto E può cadere vicino ad A, e, se AM è maggiore della semiretta, anche sul segmento AM).

Considerazioni conclusive

Molte sono state le conseguenze delle vicende che hanno portato all'elaborazione delle geometrie non euclidee.

In primo luogo va detto che l'impatto con il mondo matematico della scoperta delle nuove geometrie è stato complesso e articolato.

Da un lato esse, a seguito soprattutto del lavoro di Klein, si sono integrate in una visione della geometria che consentiva di collocare all'interno di una stessa prospettiva più teorie geometriche (tra cui quelle non euclidee, e la geometria proiettiva) che non si configuravano quindi come vere e proprie alternative, ma come tasselli di un mosaico strutturato mediante la considerazione dei "gruppi di trasformazioni". Analogamente, gli sviluppi della geometria differenziale avevano aperto la strada alla consapevolezza del fatto che ogni superficie poteva avere una sua geometria intrinseca, come si è visto a proposito della geometria sferica[7].

D'altro lato, rimaneva pur sempre il problema del ruolo che potessero avere teorie assiomatiche coerenti, ma in contrasto fra loro. Ad esempio, nelle tre geometrie euclidea, iperbolica, ellittica, al triangolo viene attribuita la proprietà di avere somma degli angoli interni rispettivamente uguale, minore, maggiore di due angoli retti. Sembra naturale affermare che il triangolo può avere una sola delle tre caratteristiche, per cui, delle tre geometrie, una sola può essere vera. Ma allora, supponendo, come è altrettanto naturale, che la geometria vera sia quella euclidea, quale senso può avere accettare delle teorie false? Ebbene, verso la fine dell'Ottocento, a seguito di un intreccio di vicende alquanto complesso, si è lentamente affermata la visione moderna dell'assiomatica secondo la quale le teorie matematiche, usando l'espressione esplicitamente citata nei programmi ministeriali, sono concepiti come sistemi ipotetico-deduttivi. Ciò significa, in sintesi, che i concetti primitivi delle teorie matematiche non hanno più (bisogno di) un preliminare riferimento ad enti esterni e, di conseguenza, gli assiomi non sono più considerati né veri, né falsi: gli enti primitivi non vengono definiti e gli assiomi sono le proposizioni che stabiliscono i legami tra gli enti primitivi che si assumono senza dimostrazione e dai quali si può iniziare a dedurre logicamente i teoremi[8]. In tal modo le teorie matematiche assumono la veste di linguaggi non interpretati e non ci si

[7] Tra l'altro, quello che storicamente è stato il primo "modello" della geometria iperbolica, vale a dire il "modello" di Beltrami, era basato sulla constatazione che le geodetiche di un tipo particolare di superficie, detta *pseudosfera*, avevano, almeno in larga misura, le proprietà delle "rette" della geometria iperbolica.

[8] Questa impostazione è resa possibile dal fatto che le regole logiche con cui si conducono le dimostrazioni fanno riferimento alla "forma" delle proposizioni, e non ai loro contenuti. Queste vicende si intrecciano con quelle dello sviluppo della logica matematica, che nel Novecento ha consentito un ulteriore perfezionamento del metodo assiomatico, da quello "moderno" a quello "formalizzato", in cui non vengono esplicitati solo gli assiomi specifici della teoria, ma anche gli assiomi e le regole logiche con cui si sviluppano le dimostrazioni. Per una trattazione più ampia di queste problematiche, in particolare per quanto riguarda il problema della coerenza, si veda M. Borga, D. Palladino", *Oltre il mito della crisi. Fondamenti e filosofia della matematica nel XX secolo*, La Scuola, Brescia, 1997.

pone più il problema della “verità” degli assiomi. Si assume inoltre che il requisito della coerenza degli assiomi sia non solo necessario, ma anche sufficiente per dichiarare legittima una teoria matematica.

Per capire meglio cosa ciò significhi, basta riflettere su quanto appreso in precedenza a proposito della geometria iperbolica. Per svilupparla non abbiamo bisogno di sapere se i suoi assiomi sono veri, né quali sono gli enti di cui si occupa[9]. Possiamo poi interpretare i concetti primitivi (“punto”, “retta”,...) sugli enti di un modello (Klein o Poincaré) e stabilire che gli assiomi divengono proposizioni vere in base a tale interpretazione[10]. Pertanto, la geometria iperbolica è coerente e quindi può essere legittimamente assunta fra le teorie matematiche. Si noti anche che una teoria matematica modernamente intesa può avere più “modelli”, anche molto dissimili fra loro, e questa, tra l’altro, è la principale ragione dell’enorme ampliamento delle applicazioni delle teorie matematiche nei più diversi settori del sapere scientifico.

Le teorie matematiche, venendo concepite come sistemi ipotetico-deduttivi, hanno perso la necessità di un aggancio preliminare con la realtà. Secondo un famoso aforisma di Bertrand Russell, “la matematica è quella scienza in cui non si sa di cosa si sta parlando, né se ciò che si sta dicendo è vero”. Questo non significa che non hanno applicazioni, ma che va distinto il piano *sintattico*, in cui si svolgono le dimostrazioni, dal piano *semantico*, in cui si interpretano i concetti primitivi e si trovano i “modelli” delle teorie, che sono gli ambiti di realtà, concreta o astratta, nei quali esse sono vere. Ciò non vuol dire che il matematico crei le teorie in modo svincolato dalla realtà, scrivendo liste di assiomi e preoccupandosi solo della loro coerenza. In genere una teoria viene costruita avendo in mente una sua applicazione: nel dimostrarne i teoremi tale applicazione non è strettamente necessaria, anzi la teoria può poi avere altri “modelli” che ne estendono l’applicabilità ad altri settori della matematica stessa o di altre discipline. Comunque, nella storia della matematica sono frequenti anche esempi di teorie che hanno trovato applicazioni utili nella scienza molto tempo dopo essere state studiate dal punto di vista matematico.

Se quanto finora richiamato può essere sufficiente per giustificare, dal punto di vista matematico, la presenza di diverse teorie geometriche, proprio nel caso della geometria possono essere sollevate altre questioni. Quando un geometra, un ingegnere, un astronomo esegue delle misure fa riferimento proprio alla geometria euclidea, che è stata ritenuta per secoli la descrizione delle proprietà oggettive dello spazio fisico: se dal punto di

[9] I primi teoremi della geometria iperbolica sono stati dimostrati da Saccheri, il quale era fermamente convinto della falsità dell’ipotesi dell’angolo acuto. Si osservi che anche per sviluppare la geometria euclidea non abbiamo bisogno di sapere che gli assiomi sono veri, e nemmeno “che cosa sono”, ad esempio, i “punti” e le “rette”: le *definizioni reali* poste all’inizio degli *Elementi* di Euclide non hanno alcun ruolo nelle dimostrazioni dei teoremi.

[10] Sorvoliamo sulla distinzione fra “modello sintattico” (ossia in un’altra teoria, come i modelli di Klein e Poincaré, che abbiamo qualificato come “modelli euclidei”) e “modello semantico” (ossia un insieme di enti che possono anche essere concreti).

vista matematico questo aggancio può essere lasciato in secondo piano, in un'ottica scientifica più generale sembra che la geometria euclidea possa mantenere un ruolo privilegiato. Le cose non sono così semplici: quando si eseguono delle misure fisiche si interviene sul mondo esterno con strumenti il cui uso presuppone già una teoria geometrica. Se misurassimo la somma degli angoli di un triangolo costituito dalle vette di tre montagne e trovassimo come valore 170°, non saremmo costretti ad abbandonare la geometria euclidea a favore di quella iperbolica, ma potremmo imputare il risultato al comportamento degli strumenti o a proprietà fisiche particolari del territorio. In altre parole, l'esperimento riguarda sempre non solo la geometria, ma la geometria e la fisica insieme. Ebbene, si sente spesso dire che Einstein ha scoperto che "la geometria dello spazio è non euclidea". Espresso in questi termini ciò è falso. Vediamo perché. Einstein ha scoperto che i raggi di luce si incurvano (non vanno secondo le linee rette della geometria euclidea) in presenza di masse. Lo stesso fenomeno può essere interpretando dicendo che i raggi di luce vanno secondo le linee rette di una opportuna geometria ellittica i cui parametri sono determinati dalle masse presenti. Le due descrizioni sono del tutto equivalenti, ma nella prima lo spazio conserva la geometria euclidea e nella seconda si assume (per mantenere la legge fondamentale dell'ottica geometrica secondo cui i raggi di luce vanno in linea retta) che la geometria sia ellittica. Ciò che Einstein ha scoperto è che, adottando la seconda descrizione, la teoria globale risultante è regolata da leggi geometriche e fisiche molto più semplici. Nella teoria della relatività generale Einstein ha preferito adottare una geometria non euclidea, in sé più complicata, per formulare una teoria fisica complessivamente più semplice (ma avrebbe potuto continuare a usare la geometria euclidea formulando leggi fisiche più sofisticate)[11].

[11] Il grande matematico H. Poincaré aveva sostenuto che la geometria euclidea sarebbe stata in ogni caso la più "comoda". Se ciò rimane vero per le nostre esigenze quotidiane, non lo è stato per la fisica relativistica, in cui si è rivelata più "comoda" la geometria ellittica.