SISTEMI ELETTORALI
LEGGI PROPORZIONALI PURE

Dario PALLADINO
(Università di Genova)

Il problema di distribuire i seggi tra i partiti dopo una elezione o, più in generale, di stabilire una graduatoria collettiva sulla base delle scelte e delle preferenze espresse da più individui, oltre ad essere di stretta attualità (si fa un gran parlare di "riforme istituzionali"), presenta aspetti matematicamente interessanti e può consentire utili riflessioni sia sull'impiego dei "modelli matematici" in situazioni di notevole importanza pratica, sia sulla costruzione dei sistemi assiomatici e sulla loro non contraddittorietà. Ci proponiamo di illustrare alcuni aspetti di questa tematica in una serie di cinque interventi, con l'obiettivo di metterne in luce le caratteristiche che possono avere utili applicazioni in campo didattico. Nei primi tre ci occuperemo esclusivamente delle "leggi elettorali", mentre negli ultimi due allargheremo il discorso al "parere di una maggioranza", concentrandoci sul "paradosso di Arrow" relativo all'impossibilità della democrazia. Queste tematiche sono già state analizzate in alcuni lavori ai quali faremo spesso esplicito riferimento. Si tratta, per quanto riguarda questo primo articolo, di V. Villani, "Leggi elettorali" ([1]), C. Bernardi e M. Menghini, "Sistemi elettorali proporzionali. La 'soluzione' italiana" ([2]) e D. R. Woodall, "How Proportional is Proportional Representation?" ([3]). Nei primi due il lettore potrà trovare molte informazioni relative al sistema elettorale italiano (e nel secondo anche una analisi matematica approfondita delle sue caratteristiche), mentre il terzo è a contenuto più tecnico. Noi non entreremo se non marginalmente nel merito delle proposte adottate nel nostro o in altri paesi, ma cercheremo di illustrare, come già si è detto, alcuni "modelli" matematici delle leggi elettorali e delle scelte sociali che riteniamo istruttivi per far emergere alcuni aspetti "strutturali" della organizzazione delle teorie matematiche.

Supponiamo che ciascuno di V individui voti per uno tra più partiti al fine di assegnare S seggi. Indicheremo con A, B, C, ... i partiti (e useremo X e Y per indicare partiti generici), con V(A), V(B), V(C),... i voti ricevuti e con S(A), S(B), S(C),... i seggi assegnati a ciascun partito, in modo che[1]:

$$V(A) + V(B) + V(C) + ... = V;$$

$$S(A) + S(B) + S(C) + ... = S.$$

È del tutto ovvio imporre che *il numero dei seggi assegnati a ciascun partito sia proporzionale al numero dei voti ricevuti*, per cui il problema dell'assegnazione dei seggi sembra facilissimo dal punto di vista matematico, riducendosi alla considerazione di alcune proporzioni: il numero di seggi da attribuire al partito X che ha ricevuto V(X) voti è $S\cdot\frac{V(X)}{V}$.

[1] Trascuriamo vari aspetti che possono essere rilevanti nelle votazioni reali, quali le astensioni e le schede bianche o nulle.

D'altra parte è evidente che, salvo in casi molto particolari, le preferenze dell'elettorato non consentono una immediata attribuzione "esatta" dei seggi. Se, ad esempio, si devono attribuire 7 seggi e i votanti sono 1400[2], l'attribuzione dei seggi sarebbe immediata qualora i voti di ciascun partito fossero multipli di 200: se V(A) = 400, V(B) = 600, V(C) = 200 e V(D) = 200, allora si ha subito, dalla formula precedente, S(A) = 2, S(B) = 3, S(C) = 1 e S(D) = 1. Si capisce tuttavia come eventualità di questo genere siano estremamente rare e i valori:

$$S\cdot\frac{V(A)}{V}\,;\ S\cdot\frac{V(B)}{V}\,;\ S\cdot\frac{V(C)}{V}\,;\ldots$$

non risultino quasi mai numeri interi. Nel caso precedente, se si ha: V(A) = 423, V(B) = 532, V(C) = 195 e V(D) = 250, i rapporti risultano:

2,115 ; 2,66; 0,975; 1,25

Sorge allora il problema di come assegnare i sette seggi tenendo conto del fatto che si è in genere in presenza di numeri decimali.

Nella ***legge elettorale proporzionale pura*** si adotta il seguente procedimento. Si assegnano, in un primo momento, a ciascun partito tanti seggi quanto indicato dalla parte intera del rapporto $S\cdot\frac{V(X)}{V}$; i restanti seggi vengono assegnati ai partiti che hanno più elevata la parte decimale del rapporto stesso[3]. Indicando, come è usuale, con [x] la parte intera del numero x, si ha allora:

S(X) = [Q(X)] o S(X) = [Q(X)] + 1.

Più precisamente, se nella prima fase vengono assegnati K degli S seggi, sarà S(X) = [Q(X)] + 1 per gli S – K partiti la cui quota Hare ha parte decimale maggiore.
Nell'esempio precedente si assegnano dapprima 2 seggi a A e B e 1 seggio a D; poiché i resti più elevati sono 0,975 e 0,66 viene assegnato 1 seggio a B e 1 seggio a C. In definitiva:

S(A) = 2; S(B) = 3; S(C) = 1 e S(D) = 1.

Questo procedimento *rispetta l'Hare minimo*, ossia ciascun partito riceve un numero di seggi almeno pari a [Q(X)], e *rispetta l'Hare massimo*, ossia ciascun partito non riceve più seggi di [Q(X)] + 1[4].

---

[2] Negli esempi useremo numeri piccoli rispetto a quelli che intervengono in genere nelle votazioni reali, dato che il nostro scopo è quello di evidenziare le caratteristiche "strutturali" delle leggi elettorali.
[3] In caso di "parità" la scelta avviene in modo diverso nelle diverse legislazioni. In ogni caso essa è puramente convenzionale e priva di particolare significato matematico (ad esempio, in caso di parità, si può procedere a un sorteggio, oppure si favorisce il partito che ha più voti, oppure quello che ne ha meno) ed è anche di scarsa importanza pratica in quanto si realizza raramente nelle situazioni reali.
[4] Per essere più precisi si definisce *Hare minimo* l'arrotondamento di Q(X) per difetto e *Hare massimo* l'arrotondamento di Q(X) per eccesso, per cui Hare minimo e Hare massimo coincidono se Q(X) è intero (caso peraltro molto improbabile nella pratica). In questo caso l'Hare massimo è Q(X) e non [Q(X)] + 1.

A prima vista sembra che il metodo sia del tutto equo. Tuttavia, come ci apprestiamo a illustrare, esso presenta alcune peculiarità che mettono in dubbio la sua legittimità.

Il primo inconveniente è illustrato dal seguente:
***Esempio* 1**. Supponiamo che 180 elettori (V = 180) debbano assegnare 9 seggi (S = 9) fra tre partiti A, B e C e che l'esito della votazione sia il seguente:

V(A) = 85; V(B) = 84; V(C) = 11.

Le quote Hare risultano:

Q(A) = 4,25; Q(B) = 4,2; Q(C) = 0,55

per cui vengono assegnati 4 seggi ad A e B e l'ultimo viene assegnato a C, la cui quota Hare ha massima parte decimale. In definitiva:

S(A) = 4; S(B) = 4; S(C) = 1.

Poniamo ora che i seggi da assegnare, anziché 9, siano 10 e che l'esito della votazione sia lo stesso di prima. Le quote Hare ora risultano:

Q(A) = 4,722...; Q(B) = 4,666...; Q(C) = 0,611...

e si assegnano in prima istanza 4 seggi ad A e B, e i due restanti seggi vengono nuovamente assegnato uno per ciascuno ad A e B, le cui quote Hare hanno la parte decimale superiore a quella di C. Pertanto:

S(A) = 5; S(B) = 5; S(C) = 0.

Pur essendovi lo stesso esito della votazione, l'aumento del numero dei seggi ha causato la perdita di un seggio a C![5]
La legge proporzionale pura non gode, quindi, della *proprietà di monotonia rispetto ai seggi* (la quale, appunto, afferma che, ferme restando le altre condizioni, se aumenta il numero complessivo S dei seggi non deve diminuire il numero di seggi attribuito a ciascun partito).

Un altro inconveniente è messo in luce dal seguente:
***Esempio* 2**. Supponiamo che V = 39, S = 3 e che le votazioni diano il seguente esito:

V(A) = 20; V(B) = 9; V(C) = 10.

Le quote Hare risultano:

Q(A) = 1,538...; Q(B) = 0,692...; Q(C) = 0,769...

e, in base alla legge proporzionale pura, a ciascun partito spetta un seggio:

S(A) = 1; S(B) = 1; S(C) = 1[6].

---

[5] Questa circostanza è nota col nome di "Paradosso dell'Alabama" in quanto fu rilevata negli USA nel 1881: dopo le votazioni allo stato dell'Alabama spettavano 8 seggi su 299, ma, se si aumentava a 300 il numero complessivo dei rappresentanti, all'Alabama ne spettavano 7.
[6] Si noti altresì che A ha la maggioranza assoluta dei voti (più della metà dei voti), ma non la maggioranza dei seggi. La legge proporzionale pura non rispetta neanche la *proprietà di maggioranza*, secondo la quale chi ha la maggioranza dei voti deve avere almeno la metà dei seggi.

Ora, se B e C si coalizzano in un unico partito B + C, supponendo che ciò non muti le preferenze degli elettori, si ha:

$V(A) = 20; V(B + C) = 19,$

da cui si ottiene: $Q(A) = 1,538...$; $Q(B + C)=1,461...$ e quindi: $S(A) = 2$; $S(B + C) = 1$. Coalizzandosi, pur essendo rimasto inalterato il numero dei voti ricevuti, B e C complessivamente hanno perso un seggio.
Si dice che la legge proporzionale pura non gode della cosiddetta *proprietà di superadditività* (la quale afferma che $S(X + Y)$ non è minore della somma di $S(X)$ e $S(Y)$).

Un altro modo per procedere nella ripartizione dei seggi si basa su una diversa considerazione. Supponiamo che 3 seggi debbano essere attribuiti da 40 elettori che possono scegliere tra un certo numero di candidati. Un candidato, non appena raggiunge il quorum di 11 voti, può ritenersi eletto in quanto, evidentemente, non è possibile che altri tre lo superino. In generale, se si supera il rapporto $\frac{V}{S+1}$ è sicuri di essere eletti. Il quoziente precedente è detto *quota o rapporto Droop*[7]. Nel caso precedente essa è 40 : 4 =10. Per determinare i seggi nel caso di una votazione sfruttando le quote Droop, si assegna, in un primo momento, al partito X un numero di seggi pari alla parte intera di $(S + 1)\cdot\frac{V(X)}{V}$, che nel seguito indicheremo con $D(X)$, e poi si assegnano gli eventuali seggi rimasti ai partiti con massima parte decimale dei quozienti precedenti[8]. È evidente che le quote Droop sono maggiori o uguali alle quote Hare, per cui nella prima fase, in genere, viene assegnato un numero maggiore di seggi. Molti ritengono che una *assegnazione equa dei seggi debba rispettare il Droop minimo*, ossia ciascun partito debba ricevere almeno $[D(X)]$ seggi (è evidente che se è rispettato il Droop minimo è rispettato, a maggior ragione, l'Hare minimo). Questo nuovo procedimento conduce in genere a risultati diversi dal precedente. Vediamo qualche esempio.

***Esempio* 3**. Supponiamo che $V = 1000$ e $S = 9$ e che i tre partiti A, B e C abbiano ricevuto i seguenti voti:

$V(A) = 800; V(B) = 98; V(C) = 102.$

Le quote Hare risultano:

$Q(A) = 7,2; Q(B) = 0,882; Q(C) = 0,918$

---

[7] Dal nome di Henry Droop che lo introdusse nel 1868.

[8] Contrariamente al caso precedente, se ciascun partito avesse un numero intero di quote Droop, il numero totale dei seggi assegnati in questa prima fase sarebbe di S+1, contro l'ipotesi che il numero dei seggi da assegnare sia S. Nell'esempio sopra, la quota Droop è di 10, e se 4 persone ricevessero ciascuna 10 voti, in base a questa regola sarebbero elette tutte e quattro, contro l'ipotesi che i posti a disposizione erano 3. Tuttavia, l'eventualità che in una votazione reale tutte le quote siano intere è talmente improbabile che si può benissimo non prenderla in considerazione. Preciseremo meglio questo aspetto in uno dei prossimi interventi.

e, in base alla legge proporzionale pura, si ha la seguente assegnazione di seggi:

S(A) = 7 S(B) = 1; S(C) = 1.

Le quote Droop sono:

D(A) = 8; D(B) = 0,98; D(C) = 1,02

e l'assegnazione di seggi risulta (senza neanche passare alle parti decimali):

S(A) = 8; S(B) = 0; S(C) = 1.

Questo esempio evidenzia che *la legge proporzionale pura non rispetta il Droop minimo*.

***Esempio* 4**. Siano V = 100 e S = 10 e supponiamo che i tre partiti A,B e C abbiano ricevuto i seguenti voti:

V(A) = 89; V(B) = 6; V(C) = 5.

Le quote Hare sono:

Q(A) = 8,9; Q(B) = 0,6; Q(C) = 0,5

e l'assegnazione dei seggi risulta[9]:

S(A) = 9; S(B) = 1; S(C) = 0.

Le quote Droop sono:

D(A) = 9,79; D(B) = 0,66; D(C) = 0,55

e l'assegnazione dei seggi in base ad esse risulta[10]:

S(A) = 10; S(B) = 0; S(C) = 0.

Questo esempio dimostra che questo nuovo procedimento *non rispetta l'Hare massimo* (in quanto A riceve 10 seggi, ossia più di [Q(A)] + 1, che in questo caso è 9).
Dal punto di vista delle proprietà generali, anche questo procedimento incorre nelle difficoltà del precedente. Ad esempio, non è soddisfatta la proprietà di monotonia rispetto ai seggi.

***Esempio* 5**. Siano V = 180 e S = 9 e supponiamo che i partiti A, B e C abbiano ricevuto i seguenti voti:

V(A) = 83; V(B) = 82; V(C) = 15.

Le quote Droop risultano:

D(A) = 4,611...; D(B) = 4,555...; D(C) = 0,833...

e l'assegnazione dei seggi è la seguente[11]:

---

[9] In un primo momento sono assegnati 8 seggi ad A, e i restanti 2 sono assegnati a A e B che hanno quote Hare con parti decimali (0,9 e 0,6) maggiori rispetto a quella della quota di C (0,5).

[10] In un primo momento si assegnano 9 seggi ad A e poi il restante viene nuovamente assegnato ad A in quanto la parte decimale della sua quota Droop (0,79) è maggiore di quella delle quote di B e C (0,66 e 0,55).

[11] Le parti intere danno i quattro seggi ad A e B, e il seggio a C proviene dal massimo delle parti decimali (0,833... rispetto a 0,611... e 0,555...).

S(A) = 4; S(B) = 4; S(C) = 1.

Se il numero dei seggi è innalzato a 10, le quote Droop si modificano come segue:

D(A) = 5,072...; D(B) = 5,011...; D(C) = 0,916...;

l'assegnazione dei seggi non richiede l'esame delle parti decimali e risulta:

S(A) = 5; S(B) = 5; S(C) = 0

e, come già succedeva con il procedimento precedente, aumentando il numero dei seggi, pur restando invariato il numero dei votanti e dei voti favorevoli, un partito può subire una diminuzione del numero dei seggi.

A conclusione di questo primo intervento osserviamo che è rimasto aperto il problema di individuare una legge elettorale che possegga almeno le seguenti proprietà:
(**A**) *rispetti il Droop minimo*, ossia ogni partito deve ricevere almeno [D(X)] seggi[12];
(**B**) *rispetti l'Hare massimo*, ossia ogni partito non deve ricevere più di [Q(X)] + 1 seggi[13];
(**C**) *sia monotono rispetto ai seggi*.
Ad esso dedicheremo il prossimo articolo.

Bibliografia

[1] V. Villani, "Leggi elettorali", *Cultura e Scuola* **101** (gennaio-marzo 1987), pp. 175-186.
[2] C. Bernardi, M. Menghini, "Sistemi elettorali proporzionali. La 'soluzione' italiana", *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana* (7) **4**-A (1990), pp.271-293.
[3] D. R. Woodall, "How Proportional is Proportional Representation?", *The Mathematical Intelligencer* **8**, n. 4, 1986, pp. 36-46.

---

[12] Salvo il caso particolare in cui tutti i D(X) siano interi, come si è rilevato nella precedente nota 9.
[13] Se Q(X) non è intero; altrimenti, ossia se Q(X) è intero, non deve ricevere più di Q(X) seggi.