SISTEMI ELETTORALI
LEGGI PROPORZIONALI CORRETTE

Dario PALLADINO
(Università di Genova)

Questo articolo costituisce la continuazione di "Sistemi elettorali. Leggi proporzionali pure", già apparso sulla rivista *Nuova Secondaria*, nel quale abbiamo esaminato due tipi di leggi elettorali proporzionali pure, basati rispettivamente sulle quote Hare e sulle quote Droop. In quella sede avevamo concluso osservando come sia auspicabile individuare una legge elettorale proporzionale che soddisfi le tre seguenti condizioni:

(**A**) *rispetti il Droop minimo*, ossia ogni partito deve ricevere almeno [D(X)] seggi[1];

(**B**) *rispetti l'Hare massimo*, ossia ogni partito non deve ricevere più di [Q(X)] + 1[2] seggi;

(**C**) *sia monotòno rispetto ai seggi* [3].

Un procedimento che si avvicina a questi requisiti è costituito dalla regola di d'Hondt[4], detta anche *legge elettorale proporzionale corretta*, largamente impiegata in molti paesi. La illustriamo con un esempio. Supponiamo che il numero V dei votanti sia 120, il numero S dei seggi sia 5 e che i partiti A, B e C abbiano ricevuto i seguenti voti:

V(A) = 65, V(B) = 30, V(C) = 25.

Si dividono i voti ricevuti da ciascun partito per i numeri 1, 2, 3, 4,... e si attribuiscono i 5 seggi ai partiti che hanno i quozienti più alti. Si può predisporre la seguente tabella (facilmente generalizzabile al caso di più partiti in lizza):

---

[1] Salvo il caso particolare in cui tutti i D(X) siano interi. Ricordiamo che la quota Droop D(X) è definita dalla formula: $D(X) = (S+1)\cdot\frac{V(X)}{V}$, dove S = numero dei seggi, V = numero dei votanti e V(X) = numero di voti ricevuti dal partito X.

[2] Se Q(X) non è intero; altrimenti, cioè se Q(X) è intero, non deve ricevere più di Q(X) seggi, . Ricordiamo che la quota Hare è definita dalla formula:
$Q(X) = S\cdot\frac{V(X)}{V}$.

[3] Ciò significa che, aumentando il numero dei seggi, ferme restando le altre condizioni, ciascun partito non deve ricevere un numero minore di seggi.

[4] Dal nome del belga Victor d'Hondt che la introdusse nel 1882. Non siamo comunque interessati a questioni di priorità; abbiamo adottato la nomenclatura dei lavori citati in bibliografia.

A	B	C
$\frac{V(A)}{1}$	$\frac{V(B)}{1}$	$\frac{V(C)}{1}$
$\frac{V(A)}{2}$	$\frac{V(B)}{2}$	$\frac{V(C)}{2}$
$\frac{V(A)}{3}$	$\frac{V(B)}{3}$	$\frac{V(C)}{3}$
......	......	......

Nel nostro esempio si ha:

A	B	C
65	30	25
32,5	15	12,5
21,66...	10	8,33...
16,25	7,5	6,25
13	......	......
......	......	......

I 5 seggi vengono attribuiti in corrispondenza dei cinque valori più alti nella tabella, ossia 65; 32,5; 30; 25; 21,66...; in definitiva:

S(A) = 3; S(B) = 1; S(C) = 1.

Se i seggi fossero stati 6, il sesto seggio sarebbe toccato nuovamente ad A (in quanto il successivo quoziente più alto è 16,25), mentre se fossero stati 7, dopo il sesto attribuito ad A, il settimo sarebbe toccato a B (il quoziente massimo dopo i primi cinque è 15), e così via, l'ottavo di nuovo ad A, il nono a C, ecc.

L'attribuzione dei seggi può essere proseguita indefinitamente e può essere descritta, oltre che con l'aiuto della tabella, con un procedimento induttivo. A ciascuno stadio al partito X che ha ricevuto V(X) voti e a cui sono stati già attribuiti S(X) seggi viene assegnato il quoziente $\frac{V(X)}{S(X)+1}$, e il seggio successivo viene assegnato al partito con il massimo quoziente[5].

---

[5] Ricordiamo che le situazioni di parità vengono risolte con qualche regola convenzionale. In genere si assegna il seggio al partito che ha avuto il maggior numero di voti, o si procede a un sorteggio, ecc.

La legge elettorale proporzionale corretta, come è evidente da quest'ultima considerazione, soddisfa la proprietà (**C**), ossia è monotòna rispetto ai seggi (se aumenta il numero dei seggi si va avanti nella assegnazione, ma i seggi già assegnati non vengono toccati in quanto i quozienti sono sempre gli stessi). Si può dimostrare che essa soddisfa anche la proprietà (**A**), ossia rispetta il Droop minimo[6]. Essa *gode inoltre della proprietà di superadditività*, ossia se due partiti si coalizzano e ricevono la somma dei voti che ottengono separatamente, il numero dei seggi che vengono assegnati alla coalizione non è minore della somma dei seggi che ciascun partito riceve separatamente[7]. Tale regola, tuttavia, non soddisfa la proprietà (**B**), ossia non rispetta l'Hare massimo, come risulta dal seguente esempio.

***Esempio* 1**. Siano V = 240, S = 6 e supponiamo che i sei partiti A, B, C, D, E e F abbiano ricevuto i seguenti voti:

$$V(A) = 115;\ V(B) = 27;\ V(C) = 26;\ V(D) = 25;\ V(E) = 24;\ V(F) = 23.$$

Dato che 115; $\frac{115}{2} = 57{,}5$; $\frac{115}{3} = 38{,}33$; $\frac{115}{4} = 28{,}75$ sono maggiori di $\frac{27}{1}$ ad A spettano 4 seggi prima che ne sia assegnato uno a B; il sesto (e ultimo) viene assegnato a C. In definitiva:

$$S(A) = 4;\ S(B) = 1;\ S(C) = 1;\ S(D) = S(E) = S(F) = 0.$$

La quota Hare di A è $Q(A) = 6 \cdot \frac{115}{240} = 2{,}875$ e l'Hare massimo di A è $[Q(A)] + 1 = 3$. Si osservi anche che A viene ad avere la maggioranza assoluta dei seggi pur non avendo nemmeno la metà dei voti.

La legge elettorale proporzionale corretta tende a favorire i partiti più grandi[8]. La regola di d'Hondt fa parte di una famiglia di leggi proporzionali basate sulla divisione studiate da Huntington nel 1921. In essa i voti ricevuti da ciascun partito vengono divise per i numeri 1,2,3,4,...(e si scelgono i quozienti più elevati); in un modo alternativo si può procedere dividendo i

---

[6] Per la dimostrazione si veda [3]. Ne segue che essa rispetta, a maggior ragione, l'Hare minimo.

[7] In formula: $S(X + Y) \geq S(X) + S(Y)$. La dimostrazione, in breve, è la seguente. Con le consuete notazioni, per ogni partito Z, si ha:

$$\frac{V(X)}{S(X)} > \frac{V(Z)}{S(Z)+1} \text{ e } \frac{V(Y)}{S(Y)} > \frac{V(Z)}{S(Z)+1}$$

(altrimenti l'ultimo seggio attribuito a X sarebbe toccato a Z, e lo stesso per Y). Posto k il rapporto a secondo membro, si ha:

$$V(X) > k\,S(X) \text{ e } V(Y) > k\,S(Y), \text{ da cui } V(X) + V(Y) > k\,(S(X) + S(Y)), \text{ ossia:}$$

$$\frac{V(X)+V(Y)}{S(X)+S(Y)} > \frac{V(Z)}{S(Z)+1}$$

e ciò significa che, supposto $V(X) + V(Y) = V(X + Y)$, qualsiasi partito Z non può interferire con l'assegnazione di $S(X) + S(Y)$ seggi al partito X + Y.

[8] Più precisamente si dimostra che se un partito X ha più voti di un partito Y, allora X non può perdere seggi in favore di Y se si passa dalla legge elettorale proporzionale pura a quella corretta. Per la dimostrazione vedi [2].

voti ricevuti per 0,1,2,3,...[9] e, in tal caso, vengono favoriti i partiti più piccoli (i quali ricevono tutti almeno un seggio). Sono poi possibili procedimenti intermedi in cui i numeri dei voti vengono divisi per numeri d(k) compresi fra k e k + 1 (ad esempio la media aritmetica, o geometrica, o armonica di k e k+1). Si ottiene così uno spettro di regole elettorali (i cui estremi sono le due precedenti, a divisori interi) che gradatamente favoriscono sempre meno i partiti minori e sempre più quelli maggiori. Rimandando a [3] per un esame di queste "regole di divisione" e le esemplificazioni di quanto affermato, si può comunque dimostrare che nessuna di tali leggi elettorali soddisfa la condizione (**B**).

Passiamo ora ad illustrare una modifica della regola precedente che soddisfa tutti e tre i requisiti richiamati inizialmente.
Nella *legge elettorale proporzionale corretta* (*regola di d'Hondt*) *con quota*[10] si procede sostanzialmente come nel caso precedente, ma il passo induttivo viene così modificato: dopo che sono stati assegnati S – 1 seggi, il successivo seggio viene attribuito secondo la regola di d'Hondt, ma restringendosi a considerare quei partiti che possono ricevere ancora un seggio senza superare il loro Hare massimo.

***Esempio* 2**. Supponiamo che V = 275 e che i tre partiti A, B e C abbiano ricevuto i seguenti voti:

V(A) = 181; V(B) = 62; V(C) = 32.

Le quote Hare (all'aumentare del numero dei seggi) di A sono:

0,658...; 1,316...; 1,974...; 2,632...; 3,290...; 3,949...; 4,607...; 5,265...

Le quote Hare[11] di B sono:

0,225...; 0,450...; 0,676...; 0,901...; 1,127...; 1,352...; 1,578...; 1,803...

Le quote Hare di C sono:

0,116...; 0,232...; 0,349...; 0,465...; 0,581...; 0,698...; 0,814...; 0,930...

Scriviamo già ordinata la sequenza dei quozienti per applicare la regola di d'Hondt:

$$\frac{181}{1} > \frac{181}{2} > \frac{62}{1} > \frac{181}{3} > \frac{181}{4} > \frac{181}{5} > \frac{32}{1} > \frac{62}{2} > \frac{181}{6} > \ldots\ldots$$

Con la regola di d'Hondt i seggi sarebbero attribuiti con la seguente sequenza: A, A, B, A, A, A, C, B, A,......
Con la regola di d'Hondt con quota si procede allo stesso modo fino al momento di attribuire il sesto seggio (fino a quel momento, infatti, come si vede dai precedenti valori delle quote Hare, nessun partito supera l'Hare

[9] La divisione di V(X) per 0 va intesa nel senso di rappresentare un quoziente maggiore di tutti gli altri. Ciò significa che a ciascun partito è assegnato inizialmente almeno un seggio (ciò può apparire assurdo per le usuali elezioni politiche, ma può avere un senso in altre occasioni).
[10] Elaborata nel 1975 da M. L. Balinski e H. P. Young (vedi [4]).
[11] Non è necessario calcolare preliminarmente tutte le quote Hare dei vari partiti (basta calcolare quelle che servono durante il procedimento), ma abbiamo preferito farlo per illustrare meglio il meccanismo.

massimo). In corrispondenza del sesto seggio, invece, la quota Hare di A è 3,949... e con l'attribuzione del suo quinto seggio A supererebbe l'Hare massimo (che è [Q(X)] + 1=4). A questo punto l'Hare massimo di B è 2 e quello di C è 1 e, dato che B finora ha ricevuto un solo seggio e C nessun seggio, a entrambi può essere assegnato un seggio senza superare l'Hare massimo. Tra i due prevale C dato che $\frac{32}{1} > \frac{62}{2}$. Quando si assegna il settimo seggio, la quota Hare di A è 4,607... e quindi A può ricevere il quinto seggio, che gli viene attribuito in quanto il suo quoziente $\frac{181}{5}$ è maggiore di quello di B che è $\frac{62}{2}$. L'ottavo seggio può essere attribuito solo ad A o a B, e spetta a B in quanto $\frac{62}{2} > \frac{181}{6}$, il nono spetta ad A e così via; in definitiva la sequenza dei seggi è la seguente: A, A, B, A, A, C, A, B, A,......

L'algoritmo funziona in quanto, al momento di assegnare il seggio numero S, un partito che non può riceverlo deve avere già ottenuto almeno $S \cdot \frac{V(X)}{V}$ seggi, e non è possibile che tutti i partiti siano in questa situazione quando sono stati assegnati S – 1 seggi. Esso soddisfa la proprietà (**B**) per il modo stesso come è costruito, la proprietà (**C**) in quanto ad ogni stadio non vengono rimessi in discussione i seggi già assegnati, e si può dimostrare che soddisfa anche la proprietà (**A**)[12]. Esso inoltre soddisfa[13] una proprietà che prende il nome di *consistenza* [14]: se due partiti X e Y ricevono S(X) e S(Y) seggi (che non superano il corrispondente Hare massimo), allora per qualsiasi altra votazione in cui X e Y ottengono lo stesso numero di voti e complessivamente S(X) + S(Y) seggi, i seggi attribuiti a X e a Y sono sempre S(X) e S(Y). In parole più semplici, la distribuzione dei seggi tra due partiti non dipende da come sono distribuiti i restanti voti fra gli altri partiti.

La legge elettorale basata sulla regola di d'Hondt con quota (legge proporzionale corretta con quota) soddisfa varie proprietà importanti. Osserviamo comunque che essa *non soddisfa*, al pari della legge proporzionale pura[15], *la proprietà di superadditività*: due partiti che, coalizzandosi, ottengono lo stesso numero complessivo di voti, possono perdere dei seggi.
Consideriamo infatti il seguente:

***Esempio* 3**. Siano V = 190 e S = 7, e supponiamo che i cinque partiti A, B, C, D e E abbiano ottenuto i seguenti voti:

V(A) = 40; V(B) = 39; V(C) = 38; V(D) = 37; V(E) = 36.

---

12 Per la dimostrazione vedi [3].
13 La dimostrazione di questa proprietà è in [4].
14 Su di essa torneremo nel prossimo intervento.
15 Come avevamo rilevato nel nostro precedente intervento.

Attribuendo i seggi con la regola di d'Hondt con quota si ottiene la seguente assegnazione[16]:

A, B, C, D, E, A, B

per cui:

S(A) = 2; S(B) = 2; S(C) = 1; S(D) = 1; S(E) = 1.

Se i due partiti A e B si coalizzano si ha la seguente situazione:

V(A + B) = 79; V(C) = 38; V(D) = 37; V(E) = 36.

Sempre attribuendo i seggi con la regola di d'Hondt con quota si ottiene la seguente assegnazione di seggi:

A + B, C, A + B, D, E, A + B, C.

Infatti, al momento di assegnare il secondo seggio, la quota Hare di A + B è $2 \cdot \frac{79}{190} = 0{,}831...$ (e l'Hare massimo di A + B è 1) e quindi il secondo seggio viene attribuito a C nonostante che $\frac{79}{2} > \frac{38}{1}$; ad A + B può invece essere assegnato il terzo seggio (in quanto l'Hare massimo di A + B diviene 2). Il quarto e il quinto seggio vengono assegnati a D e E $\left(\text{che hanno ormai i quozienti massimi } \frac{37}{1} \text{ e } \frac{36}{1}\right)$ Al momento della assegnazione del sesto seggio il quoziente massimo è quello di A + B $\left(\frac{79}{3}\right)$ e la quota Hare di A + B è 2,494... per cui A + B può ricevere tale seggio (che è il suo terzo seggio). Infine, quando si assegna il settimo seggio, il quoziente massimo è ancora quello di A + B $\left(\frac{79}{4} > \frac{38}{2} > \frac{37}{2} > \frac{36}{2}\right)$, ma la quota Hare di A + B è 2,91... e quindi A + B non può ricevere il seggio (altrimenti supererebbe l'Hare massimo) e, pertanto, il settimo seggio va a C (la cui quota Hare è 1,4).

Coalizzandosi A e B hanno ora solo 3 seggi contro i 4 che avevano ottenuto separatamente, e ciò dimostra che non vale la proprietà di superadditività[17].

Nel prossimo intervento vedremo che quest'ultima circostanza non è affatto casuale e analizzeremo le relazioni e le compatibilità tra le proprietà delle leggi elettorali.

Bibliografia

[1] V. Villani, "Leggi elettorali", *Cultura e Scuola* **101** (gennaio-marzo 1987), pp. 175-186.

---

[16] Si osservi che, in questo caso, la considerazione della quota non interviene a modificare l'assegnazione dei seggi rispetto a quanto accade applicando la regola di d'Hondt senza quota. Al momento della assegnazione del sesto seggio la quota Hare di A è 1,263... (e A può ricevere il suo secondo seggio senza superare l'Hare massimo) e al momento dell'assegnazione del settimo seggio la quota Hare di B è 1,436... e quindi B può ricevere il suo secondo seggio.

[17] Il lettore attento si sarà accorto che tale proprietà sarebbe caduta anche qualora fosse stato S = 2. Abbiamo presentato il caso più lungo per avere l'occasione di illustrare nuovamente il meccanismo di funzionamento della regola di d'Hondt con quota.

[2] C. Bernardi, M. Menghini, “Sistemi elettorali proporzionali. La ‘soluzione’ italiana”, *Bollettino dell’Unione Matematica Italiana* (7) **4**-A (1990), pp.271-293.
[3] D. R. Woodall, “How Proportional is Proportional Representation?”, *The Mathematical Intelligencer* **8**, n. 4, 1986, pp. 36-46.
[4] M. L. Balinski, H. P. Young, “The quota method of apportionment”, *American Mathematical Montly* **82** (1975), pp. 701-730.