SISTEMI ELETTORALI
LEGGI MISTE E CONSIDERAZIONI GENERALI

Dario PALLADINO
(Università di Genova)

Questo articolo costituisce la prosecuzione di due precedenti interventi dal titolo "Sistemi elettorali. Leggi proporzionali pure" e "Sistemi elettorali. Leggi proporzionali corrette" nei quali abbiamo schematicamente delineato le principali caratteristiche delle leggi elettorali nelle quali la distribuzione dei seggi è (il più possibile) proporzionale alla percentuale dei voti ricevuti da ciascun partito. Abbiamo visto leggi che favoriscono i partiti maggiori[1] e altre che favoriscono quelli minori, e abbiamo individuato alcune manchevolezze di ciascuna di esse. Prima di esaminare con qualche dettaglio le relazioni tra le proprietà delle leggi elettorali, accenniamo brevemente ad alcune modalità di assegnazione dei seggi differenti da quelle introdotte nei due articoli prima citati.

La più diffusa concorrente alle leggi elettorali proporzionali è la *legge elettorale uninominale*. Essa si basa su una divisione dell'elettorato in tante circoscrizioni quanti sono i seggi e, in ciascuna circoscrizione, il seggio viene attribuito al partito che ottiene la maggioranza dei voti. Se tale procedimento ha il vantaggio di mettere in risalto i "candidati" più che i partiti, evidentemente esso penalizza fortemente i partiti minori[2] e, inoltre, ha il difetto di non assicurare la maggioranza dei seggi al partito che riceve il maggior numero di voti. Nel caso illustrato dalla tabella seguente (V = 300 divisi in tre circoscrizioni e quindi S = 3):

	A	B
I circoscrizione	60	40
II circoscrizione	55	45
III circoscrizione	10	90

il partito A vince in due circoscrizioni e quindi riceve 2 seggi, che costituiscono la maggioranza assoluta, anche se, complessivamente, ha solo il 41,67% dei voti (125 voti sul totale di 300). Fenomeni ancora più vistosi si possono realizzare se le circoscrizioni non sono omogenee, ossia differiscono sensibilmente per il numero degli elettori.

Nella realtà, in genere, si adottano dei sistemi misti: si provvede ad una divisione dell'elettorato in circoscrizioni assegnando a ciascuna di esse un certo numero di seggi, i quali vengono effettivamente attribuiti (tutti o in parte) se le percentuali dei voti raggiungono determinate aliquote. I seggi non assegnati nella prima fase vengono raggruppati e attribuiti con una

[1] In molti paesi nei quali si adotta una legge proporzionale, per evitare la frammentazione in troppi partiti "piccoli", si adotta una soglia (spesso il 5%): se la percentuale dei voti di un partito non supera la soglia, il partito è escluso dalla distribuzione dei seggi.
[2] Anche se può favorire partiti minori che difendono gli interessi di zone geograficamente limitate.

legge di tipo proporzionale. Ad esempio, nella legge elettorale italiana per il Senato vi è una prima fase regolata da una legge di tipo uninominale, seguita poi da una distribuzione secondo una legge proporzionale corretta, mentre per la Camera la legge, che richiede due momenti, richiama maggiormente una proporzionale pura. Una esauriente analisi tecnica della situazione italiana si trova in [2]. In [1] si possono trovare alcuni semplici esempi di applicazione delle leggi uninominale e di tipo misto. Ad essi rinviamo il lettore desideroso di documentarsi meglio sulle caratteristiche (e sui difetti) delle leggi elettorali nel nostro paese. Come abbiamo già preannunciato, preferiamo collocarci da un punto di vista più "astratto" per analizzare le proprietà delle leggi elettorali.
Iniziamo con una definizione più precisa di legge elettorale. Dati due numeri naturali S (numero dei seggi) e N (numero dei partiti), una ***legge elettorale*** è una funzione che associa ad ogni N-pla di numeri naturali (V(1), V(2),...,V(N)) (che rappresenta i voti ottenuti da ciascun partito) un'altra N-pla di numeri naturali (S(1), S(2),..., S(N)) (i seggi assegnati ai rispettivi partiti) tale che:

$$S(1) + S(2) + ... + S(N) = S.$$

Nelle analisi condotte nei due precedenti articoli abbiamo individuato alcune proprietà "ragionevoli" delle leggi elettorali; le riformuliamo ora sotto forma di assiomi, accanto ad altre ancora "più evidenti".

A1. Proprietà di monotonia rispetto ai voti

A un maggior numero di voti non può corrispondere un minore numero di seggi [3]:

$$\text{se } V(X) > V(Y), \text{ allora } S(X) \geq S(Y).$$

A2. Proprietà di monotonia rispetto ai seggi

Se aumenta il numero dei seggi S, *fermi restando i voti attribuiti a ciascun partito, allora non diminuisce il numero dei seggi attribuiti a ciascun partito* [4].

A3. Proprietà della maggioranza

Se un partito ottiene almeno la metà dei voti, ad esso va attribuita almeno la metà dei seggi [5]:

$$\text{se } V(X) \geq \frac{V}{2}, \text{ allora } S(X) \geq \frac{S}{2}.$$

---

[3] Si noti che non appare opportuno sostituire il ≥ con > dato che, se due partiti hanno un numero di voti quasi uguale, può essere equo attribuire ad entrambi lo stesso numero di seggi. In [2] si evidenzia il fatto che A1 è conseguenza di altri due principi: il *principio di simmetria* – in base al quale non si fa alcuna preferenza tra i partiti (ad esempio non conta l'ordine di presentazione delle liste) – e un principio più debole di monotonia in base al quale, se aumenta il numero dei voti di un partito X e non aumentano quelli di nessun altro, a parità di voti complessivi non può diminuire il numero dei seggi attribuiti a X.

[4] Si ricordi il "paradosso dell'Alabama" evidenziato nel nostro primo articolo.

[5] Come per A1, non è opportuno sostituire il ≥ con > (se S è pari e X ha poco più della metà dei voti può essere equo assegnarlgi la metà dei seggi). Non è inoltre "ragionevole" l'implicazione inversa di A3: se vi è un solo seggio da attribuire è in genere corretto attribuirlo al partito di maggioranza relativa (senza richiedere la maggioranza assoluta).

A4. Proprietà dell’Hare minimo

A ciascun partito X *vanno assegnati almeno* $\left\lfloor S\cdot\frac{V(X)}{V}\right\rfloor$ *seggi* [6].

A5. Proprietà dell’Hare massimo

A ciascun partito X *non va assegnato un numero di seggi superiore all’approssimazione per eccesso* [7] *di* $S\cdot\frac{V(X)}{V}$.

A6. Proprietà del Droop minimo

A ciascun partito X *vanno assegnati almeno* $\left\lfloor (S+1)\cdot\frac{V(X)}{V}\right\rfloor$ *seggi* [8].

A7. Proprietà di superadditività

Se due partiti X *e* Y *si coalizzano in un’unica lista* X + Y *che ottiene* V(X) + V(Y) *voti, allora il numero dei seggi di* X + Y *non può essere inferiore alla somma dei seggi* S(X) + S(Y) *che ciascun partito avrebbe ottenuto separatamente* (S(X+Y) ≥ S(X)+S(Y)).

A8. Proprietà di consistenza

Se due partiti X *e* Y *ricevono* S(X) e S(Y) *seggi, allora per qualsiasi altra votazione in cui* X *e* Y *ottengono lo stesso numero di voti e complessivamente* S(X) + S(Y) *seggi, i seggi attribuiti a* X *e a* Y *sono sempre* S(X) *e* S(Y).

A8 sancisce che la distribuzione dei seggi tra due partiti non dipende da come sono distribuiti i restanti voti fra gli altri partiti.

A9. Proprietà di consistenza rispetto alla quota

Come A8, *ma limitatamente ai partiti* X *e* Y *che non superano il corrispondente Hare massimo.*

È ovvio che **A6 implica A4** e che **A8 implica A9**.

A1 e A7 implicano A3.

Infatti, sia X un partito che ha almeno la metà dei voti. Supponiamo che tutti gli altri partiti si coalizzino nel partito Z; dato che V(X) ≥ V(Z), per A1 si ha S(X) ≥ S(Z). Per A7, S(Z) è maggiore o uguale alla somma dei seggi che spettano ai partiti diversi da X, e quindi $S(X) \geq \frac{S}{2}$.

---

[6] Come si è visto negli articoli precedenti, questo assioma stabilisce che ciascun partito abbia un numero di seggi almeno pari alla parte intera della percentuale dei suoi voti. Da esso segue la *proprietà di unanimità*, ossia che se un partito riceve tutti i voti, gli vengono assegnati tutti i seggi.

[7] Posto $Q(X) = S\cdot\frac{V(X)}{V}$, l’Hare minimo è [Q(X)] e l’Hare massimo è [Q(X)] + 1 se Q(X) non è intero ed è uguale a Q(X) se questo è intero.

[8] A meno che tutti i quozienti $(S + 1)\cdot\frac{V(X)}{V}$ siano interi. In tal caso (del tutto improbabile in pratica) si assegna a ciascun partito un numero di seggi pari all’eccesso della parte intera di $(S + 1)\cdot\frac{V(X)}{V-1}$. Per il commento di A6 vedi gli articoli precedenti.

A6 implica A3.

Infatti, se $S(X) \geq \left\lfloor (S+1)\cdot\frac{V(X)}{V} \right\rfloor$ e $V(X) \geq \frac{V}{2}$, ne segue che $\frac{V(X)}{V} \geq \frac{1}{2}$ quindi che $S(X) \geq \left\lfloor \frac{S+1}{2} \right\rfloor \geq \frac{S}{2}$.

I nove assiomi sembrano tutti alquanto plausibili e soprattutto i primi quattro sembrano fuori discussione. È quindi alquanto sorprendente che *non esista alcuna legge elettorale che soddisfi tutti e nove gli assiomi* (i nove assiomi sono incompatibili). Anzi, dimostriamo che *se una legge elettorale soddisfa* A1 *non può soddisfare simultaneamente* A5 *e* A7 (e quindi già A1, A5 e A7 sono incompatibili).

Supponiamo che V = 190, S = 7, i partiti siano 5 e abbiano ottenuto i seguenti voti:

V(A) = 40; V(B) = 39; V(C) = 38; V(D) = 37; V(E) = 36[9].

Se un sistema elettorale soddisfa A1, allora necessariamente S(A) + S(B) ≥ 4. Infatti, se fosse S(A) + S(B) < 4, allora si avrebbe S(C) + S(D) + S(E) ≥ 4 e uno dei tre partiti minori avrebbe almeno 2 seggi, e quindi più seggi di uno dei due partiti maggiori. Se supponiamo che A e B si coalizzino, allora V(A + B)=79, e la quota Hare di A + B risulta $7 \cdot \frac{79}{190} = 7\cdot 0{,}4388... = 2{,}910...$; l'Hare massimo di A + B è 3 e quindi S(A + B) < S(A) + S(B) (se vale A5 non può valere A7).

Si è allora stabilito che, una volta assunto A1, bisogna optare o per A5 o per A7 nonostante che, intuitivamente, entrambi appaiono auspicabili per un buon sistema elettorale. Non sempre, quindi, si possono far coesistere requisiti che appaiono del tutto "naturali".

Vediamo ora come si comportano le leggi elettorali che abbiamo esaminato nei due articoli precedenti nei confronti dei nove assiomi.

(**A**) La legge proporzionale pura (con quote Hare) soddisfa gli assiomi A1, A4 e A5 e, come si è osservato a suo tempo mediante esempi, non soddisfa né A2, né A3, né A6, né A7 (e quindi nessuno di questi quattro assiomi consegue da A1, A4 e A5).

(**B**) La legge proporzionale pura (con quote Droop) soddisfa gli assiomi A1 e A6 (e quindi, come si è osservato in precedenza, soddisfa A4 e A3), e, come si è visto, non soddisfa né A2, né A5.

(**C**) La legge proporzionale corretta (la regola di d'Hondt) soddisfa tutti gli assiomi eccetto A5. Abbiamo infatti visto nell'articolo precedente che soddisfa A2, A6[10] e A7. Si vede facilmente che valgono A1 e A8 e, quindi, ne seguono tutti gli altri, salvo appunto A5.

---

[9] È la situazione dell'Esempio 3 del precedente articolo.
[10] Per la dimostrazione di A6 si veda [3].

Si può dimostrare che *la legge proporzionale corretta è l'unica legge elettorale che soddisfa* A6 *e* A8.
Consideriamo una legge elettorale che soddisfi A6 e A8 e supponiamo che, in base ad essa, a due partiti A e B che hanno ricevuto V(A) e V(B) voti siano assegnati S(A) e S(B) seggi (e indichiamo con N la somma S(A) + S(B)). In base ad A8 tale assegnazione non è influenzata da come gli altri voti sono distribuiti agli altri partiti, per cui possiamo limitarci a considerare le situazioni di A e B. Assegnamo i seggi ad A e B usando la legge proporzionale corretta e supponiamo che ad essi risultino attribuiti rispettivamente S'(A) e S'(B) seggi. Si ha allora[11]:

$$\frac{V(A)}{S'(A)} \geq \frac{V(B)}{S'(B)+1} \quad \text{con } S'(A) + S'(B)=N.$$

Da: V(A) · (S'(B) + 1) ≥ V(B) · S'(A), aggiungendo V(A) · S'(A) ad ambo i membri e raccogliendo, si ottiene:

$$V(A) \cdot (S'(A) + S'(B) + 1) \geq (V(A) + V(B)) \cdot S'(A),$$

ossia:

$$V(A) \cdot (N + 1) \geq (V(A) + V(B)) \cdot S'(A),$$

cioè:

$$\frac{V(A)\cdot(N+1)}{V(A)+V(B)} \geq S'(A).$$

Dato che S'(A) è un numero intero ne segue che:

$$\left\lfloor \frac{V(A)\cdot(N+1)}{V(A)+V(B)} \right\rfloor \geq S'(A).$$

Poiché la legge elettorale, per ipotesi, soddisfa A6 (rispetta il Droop minimo), ne segue che:

$$S(A) \geq \left\lfloor \frac{V(A)\cdot(N+1)}{V(A)+V(B)} \right\rfloor, \text{ e quindi } S(A) \geq S'(A).$$

In modo analogo si dimostra che S(B) ≥ S'(B). Da S(A) ≥ S'(A) e S(B) ≥ S'(B), essendo S(A) + S(B) = S'(A) + S'(B), segue che S(A) = S'(A) e S(B) = S'(B).

(**D**) La legge proporzionale corretta con quota soddisfa gli assiomi A2, A4, A5, A6[12] e A9[13]. In [4] è dimostrato che questa legge è l'unica che soddisfa A2, A4, A5 e A9. Essa soddisfa tutti gli assiomi eccetto A7 (per quanto visto in precedenza) e A8.

Per quanto riguarda A8 consideriamo il seguente:
Esempio. Supponiamo che V = 275 e che i tre partiti A, B e C abbiano ricevuto i seguenti voti:

V(A) = 181; V(B) = 62; V(C) = 32.

[11] In caso contrario il seggio S'(A) di A sarebbe stato attribuito a B.
[12] Per la dimostrazione si veda [3].
[13] Per la dimostrazione si veda [4].

Se assegnamo 6 seggi ai partiti A, B e C con la regola proporzionale corretta con quota si ottiene[14]:

S(A) = 4; S(B) = 1; S(C) = 1.

Supponiamo ora che 5 seggi siano attribuiti, sempre con la stessa legge, ad A e C pur continuando a valere che V(A)=181 e V(C)=32.

Dato che: $\frac{181}{1} > \frac{181}{2} > \frac{181}{3} > \frac{181}{4} > \frac{181}{5} > \frac{32}{1}$

e le quote Hare di A sono:

0,849...; 1,699...; 2,549...; 3,399...; 4,248...

i cinque seggi vengono tutti assegnati ad A (che non supera mai l'Hare massimo). Ciò è in contraddizione con A8.

Bibliografia

[1] V. Villani, "Leggi elettorali", *Cultura e Scuola* **101** (gennaio-marzo 1987), pp. 175-186.
[2] C. Bernardi, M. Menghini, "Sistemi elettorali proporzionali. La 'soluzione' italiana", *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana* (7) **4**-A (1990), pp.271-293.
[3] D. R. Woodall, "How Proportional is Proportional Representation?", *The Mathematical Intelligencer* **8**, n. 4, 1986, pp. 36-46.
[4] M. L. Balinski, H. P. Young, "The quota method of apportionment", *American Mathematical Montly* **82** (1975), pp. 701-730.

[14] Si tratta dell'Esempio 2 già considerato, per altri fini, nel nostro precedente articolo.