SISTEMI DI SCELTE SOCIALI
CONSIDERAZIONI GENERALI

Dario PALLADINO
(Università di Genova)

In tre precedenti interventi ("Sistemi elettorali. Leggi proporzionali pure", "Sistemi elettorali. Leggi proporzionali corrette", "Sistemi elettorali. Leggi miste e considerazioni generali") abbiamo analizzato varie caratteristiche delle leggi elettorali e siamo giunti alla conclusione che non esiste una legge elettorale perfetta, ossia tale da soddisfare simultaneamente alcuni requisiti che, intuitivamente, appaiono desiderabili se si vuole garantire l'equità del sistema. E questo già nel caso di una votazione "semplice", ossia in cui ciascun elettore esprime una ed una sola preferenza. Non è quindi sorprendente che le cose si complichino ulteriormente qualora gli elettori, anziché votare per un singolo partito, esprimano una lista di preferenze tra varie alternative. In questo articolo e nel successivo ci proponiamo di illustrare un risultato analogo a quello ottenuto negli interventi prima citati, ossia l'impossibilità di soddisfare simultaneamente un certo numero di requisiti tutti altamente plausibili, quando si è in presenza di una votazione che ha lo scopo di ordinare un insieme di alternative. Che le cose si complichino appare evidente già da un semplice esempio. Supponiamo che tre amici A, B e C debbano mettersi d'accordo su come passare la serata, abbiano a disposizione tre alternative *a* (giocare a carte), *b* (andare al cinema) e *c* (andare a ballare) e che le rispettive preferenze siano quelle della seguente tabella:

	A	B	C
I preferenza	*a*	*b*	*c*
II preferenza	*b*	*c*	*a*
III preferenza	*c*	*a*	*b*

La "regola della maggioranza" non consente di prendere una decisione: due amici preferiscono *a* a *b*, due preferiscono *b* a *c* e due preferiscono *c* ad *a*. Le "preferenze della maggioranza" non obbediscono alla proprietà transitiva e, quindi, non è possibile ordinarle (questa circostanza è nota come "il paradosso del voto").

Supponiamo allora che i tre amici decidano di votare prima se giocare a carte (*a*) o andare a ballare (*c*). Se essi votano secondo le loro preferenze, vince *c* (con i voti di B e C) e, nel successivo ballottaggio fra *b* e *c*, vince *b* (con i voti di B e di A). Si vede subito, comunque, che tale esito dipende dal fatto che la prima votazione ha messo a confronto *a* e *c*. Se si mettono a confronto prima *b* e *c*, tra i due prevale *b* (con i voti di A e B), ma nel ballottaggio fra *b* e *a* vince *a* (con i voti di A e C); infine, se si mettono a confronto prima *a* e *b*, alla fine prevale *c*. L'esito finale dipende dall'ordine con cui si confrontano a due a due le alternative. La cosa ancora più curiosa è la seguente: supponiamo che l'ordine di confronto sia il primo, ossia che si confrontino prima *a* e *c*. Come si è visto, alla fine prevale *b*, e C è il più scontento dei tre amici. Tuttavia, se nella prima votazione votasse per *a*, anziché per *c*, farebbe vincere *a* al primo turno e *a* prevale anche nel ballottaggio con *b*. Quindi, se C non votasse per la sua I preferenza, ma per la II, alla fine quest'ultima prevarrebbe, mentre se C vota per la sua I preferenza, alla fine prevarrebbe quella che per lui è la III preferenza. In definitiva a C[1] conviene votare in modo "non sincero"[2].

Questo tipo di situazione ha dei notevoli riscontri nella pratica. Supponiamo che, in uno schieramento politico, i conservatori siano il 40%, i progressisti il 44% e i moderati il 16% e che ciascuno dei tre proponga un candidato per una certa carica. In una votazione a maggioranza prevale il candidato progressista. Tuttavia, i progressisti preferiscono il candidato moderato a quello conservatore e i conservatori quello moderato a quello progressista. Se un quarto dei moderati (ossia il 4% del totale) preferisce il candidato progressista al conservatore e i rimanenti tre quarti (ossia il 12% del totale) il conservatore al progressista, si ha la situazione in cui, in un confronto diretto, il candidato moderato prevarrebbe sia contro il progressista (in quanto al 16% dei moderati si aggiungerebbe il 40% dei conservatori), sia contro il conservatore (al 16% dei moderati si aggiungerebbe il 44% dei progressisti), mentre il confronto tra il candidato progressista e quello conservatore si risolverebbe a favore di quest'ultimo (che può contare, oltre che sul 40% dei conservatori, sul 12% di moderati). Qualsiasi decisione solleva delle fondate obiezioni[3].

Cerchiamo ora di formalizzare questo tipo di considerazioni.
Siano date K possibili alternative. Le indichiamo con lettere minuscole a, b, c,... (e usiamo x, y, z come variabili per alternative, cioè per elementi di K). Sono date due relazioni binarie in K; la prima, che indichiamo con P, ha il significato di "è preferito a" (xPy si legge "x è preferito a y") e la seconda, che indichiamo con I, ha il significato di "è indifferente a" (xIy si legge "x è indifferente a y").
Si suppone che P e I soddisfino le seguenti condizioni (per ogni x, y e z):

1) Se xPy, allora non yPx
2) Se xPy, allora non xIy

[1] La situazione è analoga per ciascuno degli altri due amici qualora cambiassero le due alternative messe in votazione per prime.

[2] Una situazione del genere è alla base del "paradosso dell'emendamento". Supponiamo che A, B e C siano tre gruppi politici e che una certa legge L sia voluta da A e B, ma fortemente osteggiata da C (che però non ha una consistenza tale da poterne bloccarne l'approvazione). C presenta allora un emendamento, ossia una modifica di L in LE, gradito da A, ma fortemente sgradito a B, tanto che B, piuttosto che LE, preferisce che non vi sia alcuna legge (NL). Si ha allora una situazione di scelta fra L, LE e NL analoga a quella della tabella (le preferenze di A sono, nell'ordine, LE, L, NL; quelle di B: L, NL, LE, e quelle di C: NL, LE, L). Se si vota prima fra L e LE finisce per prevalere NL e C, magari disponendo di una consistenza numerica notevolmente inferiore a quelle di A e B, riesce nel suo intento di bloccare la legge (facendo "litigare" A e B).

[3] Per esempi quale quello ora proposto e per molti altri che si ricollegano a proprietà che abbiamo incontrato negli articoli precedenti si veda [2].

3) Se xIy, allora non xPy e non yPx

4) xPy o yPx o xIy[4]

5) Se xPy e yPz, allora xPz

6) Se xPy e yIz, allora xPz

7) Se xPy e xIz, allora zPy

8) Se xIy e yIz, allora xIz

Le proprietà transitive 5)-8) indicano che stiamo formalizzando le preferenze di un soggetto ideale[5].
Si osservi che dalla 1) segue che, per ogni x, non può essere xPx e, quindi, dalla 4) si ottiene che, per ogni x, xIx (ossia I è riflessiva). Inoltre, se xIy, allora è anche yIx (ossia I è simmetrica). Infatti, se non fosse yIx, per la 4) dovrebbe essere yPx oppure xPy. Se fosse yPx, da yPx e xIy, per la 6) si avrebbe yPy (contro quanto prima osservato), mentre se fosse xPy, da xPy e xIy, per la 7) si avrebbe nuovamente yPy.
La relazione I, pertanto, è riflessiva, simmetrica e transitiva, ossia è una relazione di equivalenza e, quindi, determina una suddivisione dell'insieme K in "classi di indifferenza". La relazione P si può estendere all'insieme quoziente delle classi di indifferenza; indicando con [x] la classe di equivalenza di x, se si pone:

[x]P'[y] se e solo se xPy,

si dimostra facilmente, utilizzando la 6) e la 7), che P' è ben posta. Si ha poi subito che P' è irriflessiva, transitiva e connessa e quindi che è un ordine totale sulle classi di indifferenza.
A parte questi dettagli tecnici[6], ai nostri scopi è sufficiente ricordare che, dato l'insieme delle alternative K, se un individuo le raggruppa in classi di indifferenza[7] e ordina totalmente queste classi, egli individua il suo ordinamento preferenziale delle alternative, ossia la sua *graduatoria individuale*.

Il problema che ci poniamo è allora il seguente. Dati l'insieme K e un insieme C di n individui ciascuno dei quali propone un ordinamento di K, in che modo si può scegliere un ordinamento di K che rispetti il più possibile le preferenze espresse dagli individui dell'insieme?
Indichiamo con P_h e con I_h le relazioni di preferenza e di indifferenza dell'h-esimo individuo dell'insieme C (h varia quindi da 1 a n, estremi inclusi), ossia le relazioni che gli consentono di esprimere il suo ordinamento delle (classi di indifferenza di) alternative di K. Si vuole determinare una funzione, che chiameremo *legge di benessere sociale*, la quale associ a ciascuna n-pla di

---

[4] Come è usuale in matematica, salvo indicazione contraria, "o" è usato nel senso inclusivo (ossia come "vel"). Se nella 4) "o" si intende nel senso esclusivo (ossia come "aut"), essa implica, rendendole superflue, 1), 2) e 3).
[5] Non sempre, nella realtà, le persone hanno preferenze transitive o connesse.
[6] Sui quali ci siamo brevemente soffermati perché, opportunamente esemplificati e riformulati, costituiscono un significativo esercizio di matematica per gli studenti delle scuole secondarie.
[7] Le quali, evidentemente, possono essere costituite tutte da elementi singoli.

graduatorie individuali (ossia ad ogni n-pla di coppie (P_h, I_h) che soddisfano 1)-8)) una graduatoria collettiva (ossia una coppia che indicheremo (P, I)), anch'essa che soddisfa 1)-8).
Quanto abbiamo visto all'inizio è che una legge di benessere sociale che si basi sulla maggioranza non è immediata da costruire in quanto le preferenze basate sulla maggioranza non sono transitive[8]. Seguendo quanto esposto in [1] e [3][9], e in linea con la nostra precedente trattazione delle leggi elettorali, elenchiamo alcune proprietà auspicabili per la legge di benessere sociale.

A1. Proprietà di completezza

In corrispondenza di ogni n-*pla di graduatorie individuali, la legge di benessere sociale deve indicare una ed una sola graduatoria collettiva.*
A1 sottolinea semplicemente che la legge di benessere sociale è una funzione totale, ossia esprime una scala collettiva di preferenze qualsiasi siano quelle dei singoli membri della società. Sostanzialmente sottolinea la libertà di scelta degli individui nel proporre la loro graduatoria.

A2. Proprietà di sovranità dei cittadini

Per ogni coppia x, y *di elementi distinti di* K *esiste una* n-*pla di graduatorie individuali tale che ad essa è associata una graduatoria collettiva in cui* x *è preferita a* y (*ossia in cui* xPy).
In parole più semplici, la legge di benessere sociale non deve avere preconcetti, ossia, per ogni coppia di alternative x e y, vi è almeno un caso in cui nella graduatoria collettiva x è preferito a y. Se ciò non accadesse significa che y sarebbe sempre automaticamente preferito ad x, per cui le preferenze collettive potrebbero non corrispondere a quelle dei singoli individui qualora questi preferissero x a y.

A3. Proprietà di correlazione positiva

Se, per una certa n-*pla di graduatorie individuali, la legge di benessere sociale associa una graduatoria collettiva in cui* xPy, *allora, per tutte le altre* n-*ple di graduatorie individuali che differiscono dalla precedente solo perché in alcune graduatorie individuali* x *ha migliorato la sua posizione, nella graduatoria collettiva deve essere* xPy.
Vi deve essere correlazione positiva fra le graduatorie individuali e quella collettiva. Se, nella graduatoria collettiva associata ad una certa distribuzione di preferenze individuali, x è preferito a y, e se presso i membri della società cresce il gradimento di x e resta invariato quello di y, nella graduatoria collettiva, a maggior ragione, x deve continuare a essere preferito a y.

---

[8] Il fenomeno dell'intransitività non va sottovalutato. Si potrebbe pensare che la circostanza che abbiamo rilevato nell'esempio iniziale dei tre amici sia abbastanza rara, nel senso che, quando vi sono numerose persone e varie alternative, la circolarità si presenti con minore frequenza. Come evidenziato da S. Brams (*Paradoxes in Politics*, Free Press, New York, 1976) - e riportato in [2] - se il numero delle alternative è 3 la possibilità di intransitività della regola di maggioranza tende verso l'8,8% al crescere del numero dei votanti, ma tale limite aumenta notevolmente se cresce il numero delle alternative (diventa del 17,6% per 4 alternative, del 25,1% per 5 alternative, del 31,5% per 6 alternative, del 36,9% per 7 alternative e tende al 100% al crescere del numero delle alternative).

[9] I quali si fondano a loro volta su un celebre volume dell'economista americano Kenneth J. Arrow (*Social choice and individual values*, Wiley, New York, 1951) i cui risultati hanno avuto una vastissima eco e hanno costituito l'inizio di una notevole serie di ricerche.

A4. Proprietà di invarianza delle alternative irrilevanti

Se, per una certa n-*pla di graduatorie individuali, la legge di benessere sociale associa una graduatoria collettiva in cui* xPy, *allora, per tutte le altre n-ple di graduatorie individuali in ciascuna delle quali la relazione di preferenza tra x e y non è mutata, nella graduatoria collettiva deve continuare a essere* xPy.

Se la società preferisce x a y, se cambiano le opinioni di preferenza (e di indifferenza) dei cittadini per quanto riguarda le altre alternative, ma tutti conservano le preferenze relative fra x e y, allora la società deve continuare a preferire x a y. In altre parole, la legge di benessere sociale, per stabilire la preferenza tra x e y deve considerare solo le relazioni individuali fra x e y, e non contano le relazioni con le altre alternative.

A5. Proprietà di non dittatorialità

La legge di benessere sociale non associa ad ogni n-*pla di graduatorie individuali quella di un particolare individuo* :
non esiste h *tale che, per ogni* x *e* y, *se* xP_hy, *allora* xPy.

Se le scelte sociali si identificassero con quelle di un unico individuo, questi sarebbe un dittatore.

Le cinque proprietà appaiono del tutto ragionevoli per un qualunque metodo democratico di prendere decisioni collettive sulla base delle preferenze individuali espresse mediante una votazione. Appare quindi del tutto sorprendente il fatto che non esista alcuna legge di benessere sociale che soddisfa tutti e cinque gli assiomi. E' questo il cosiddetto "teorema di Arrow", dimostrato nel volume citato nella nota 9, che, per la sua portata sulla teoria delle decisioni, è spesso qualificato come "il paradosso di Arrow". Un altro[10] premio Nobel per l'economia, Paul Samuelson, ha paragonato l'impatto di questo risultato sull'economia e sulla scienza politica a quello del teorema di incompletezza di Gödel sulla logica e sulla problematica dei fondamenti della matematica. La dimostrazione del teorema di Arrow non è difficile in quanto non richiede l'impiego di strumenti tecnici sofisticati, ma è piuttosto articolata, e quindi la rimandiamo al prossimo intervento.

Bibliografia

[1] G. Dall'Aglio, "Decisioni di gruppo: il paradosso di Arrow", *Archimede* **34** (1982), pp. 3-14.
[2] P. Hoffman, *La vendetta di Archimede. Gioie e insidie della matematica*, Bompiani, Milano, 1990; in particolare il Cap.12, "La democrazia è matematicamente impossibile?", pp. 211-244.
[3] M. D. Resnik, *Scelte. Introduzione alla teoria delle decisioni*, Franco Muzzio Editore, Padova, 1990; in particolare il Cap.6, "Scelte sociali", pp. 279-333.

[10] Arrow ha ricevuto il premio Nobel per l'economia nel 1972.