SISTEMI DI SCELTE SOCIALI
IL TEOREMA DI ARROW

Dario PALLADINO
(Università di Genova)

In questo articolo, che costituisce la continuazione di "Sistemi di scelte sociali. Considerazioni generali" (*Nuova Secondaria* XI, 1993, pp. 80-82), vogliamo presentare la preannunciata dimostrazione del teorema di Arrow.
Richiamiamo la nomenclatura necessaria per formulare l'enunciato del teorema. Dati un insieme finito K di alternative (usiamo x, y e z come variabili per elementi di K) e un insieme C di n individui ciascuno dei quali propone un ordinamento totale[1] di K, il problema è quello di determinare una funzione, che chiameremo *legge di benessere sociale*, la quale associ a ciascuna n-pla di graduatorie individuali una graduatoria collettiva[2].
Elenchiamo, sotto forma di assiomi, alcune proprietà che si ritengono necessarie affinché la legge di benessere sociale possa essere ritenuta realmente "democratica"[3].

A1. Proprietà di completezza

In corrispondenza di ogni n*-pla di graduatorie individuali, la legge di benessere sociale deve indicare una ed una sola graduatoria sociale.*

A2. Proprietà di sovranità dei cittadini

Per ogni coppia x, y *di elementi distinti di* K *esiste una* n*-pla di graduatorie individuali tale che ad essa è associata una graduatoria collettiva in cui* x *è preferito a* y (*ossia in cui* xPy).

A3. Proprietà di correlazione positiva

---

[1] Indichiamo con P_h e con I_h le relazioni di preferenza e di indifferenza dell'h-esimo individuo dell'insieme C (h varia quindi da 1 a n, estremi inclusi), ossia le relazioni binarie che gli consentono di esprimere il suo ordinamento totale delle (classi di indifferenza di) alternative di K. Per i dettagli si veda l'articolo richiamato in apertura.
[2] Ossia una funzione che associa ad ogni n-pla di coppie (P_h, I_h) una coppia, che indicheremo (P, I), che consente l'ordinamento collettivo di K. Nell'articolo prima citato abbiamo elencato le proprietà che devono essere soddisfatte dalle relazioni di preferenza P_h e P e di indifferenza I_h e I. Tra di queste sono importanti le proprietà transitive (se xPy e yPz, allora xPz; se xPy e yIz, allora xPz; se xPy e xIz, allora zPy; se xIy e yIz, allora xIz) e la proprietà di connessione (che sfrutteremo nella conclusione della dimostrazione del teorema di Arrow): per ogni x, y vale xPy o yPx o xIy.
[3] Per i commenti a questi assiomi rinviamo all'articolo prima citato. Il loro significato intuitivo è peraltro abbastanza evidente.

Se, per una certa n*-pla di graduatorie individuali, la legge di benessere sociale associa una graduatoria collettiva in cui* xPy*, allora, per tutte le altre* n*-ple di graduatorie individuali che differiscono dalla precedente solo perché in alcune graduatorie individuali* x *ha migliorato la sua posizione, nella graduatoria collettiva deve essere* xPy.

A4. Proprietà di invarianza delle alternative irrilevanti

Se, per una certa n*-pla di graduatorie individuali, la legge di benessere sociale associa una graduatoria collettiva in cui* xPy*, allora, per tutte le altre n-ple di graduatorie individuali in ciascuna delle quali la relazione di preferenza tra* x *e* y *non è mutata, nella graduatoria collettiva deve continuare a essere* xPy.

A5. Proprietà di non dittatorialità

La legge di benessere sociale non associa ad ogni n*-pla di graduatorie individuali quella di un particolare individuo* :
non esiste h *tale che, per ogni* x *e* y*, se* xP_hy*, allora* xPy.

Il **teorema di Arrow** sancisce che *non esiste alcuna legge di benessere sociale che soddisfa simultaneamente tutti gli assiomi* A1, A2, A3, A4 e A5[4].

Per dimostrare il teorema dimostriamo prima che dagli assiomi A2, A3 e A4 segue la seguente:

Proprietà di Pareto[5] **(P)**: *se, per ogni* h (*da* 1 *a* n), xP_hy, *allora* xPy.

Dimostrazione. Sia data una n-pla di graduatorie individuali tale che, per ogni h, xP_hy. Per A4 possiamo limitare le nostre considerazioni alle due sole alternative x e y (trascurando tutte le altre[6]). Per A2 vi è una n-pla di graduatorie individuali, le cui relazioni di preferenza indichiamo con P_h', tale che nella corrispondente graduatoria collettiva x è preferito a y (xP'y).

---

[4] Il teorema di Arrow vale sotto l'ipotesi che n sia almeno 2 (e questo è ovvio poiché il problema di armonizzare le scelte individuali si pone se vi sono almeno due graduatorie) e che il numero delle alternative sia almeno 3 (in quanto bisogna far intervenire, come vedremo più avanti, quel fenomeno di intransitività di cui si è parlato all'inizio del precedente intervento). Se le alternative sono due, la regola di maggioranza, opportunamente formulata, soddisfa gli assiomi.

[5] Questa proprietà, che deve il suo nome al famoso economista italiano Pareto, può essere chiamata "proprietà di unanimità".

[6] A4, infatti, sancisce proprio che la relazione di preferenza tra x e y nella graduatoria collettiva dipende dalle relazioni di preferenza individuali tra x e y, e non dalle relazioni di preferenza di x e y con altre alternative o tra le altre alternative: la legge di benessere sociale deve basarsi solo su x e y, come se le altre alternative non esistessero.

Se in qualcuna delle graduatorie individuali x non è preferito a y (non vale $xP_h'y$), spostiamo in essa x al primo posto. In tal modo x migliora la propria posizione nelle graduatorie individuali e, per l'assioma A3, nella corrispondente graduatoria collettiva x continua, a maggior ragione, ad essere preferito a y. Ma ora in tutte le graduatorie individuali, x è preferito a y, e quindi la situazione relativa di x e y è come nella n-pla di graduatorie individuali da cui siamo partiti. Per A4 segue che xPy come si voleva dimostrare.

Per dimostrare il teorema di Arrow, ossia che non vi è alcuna legge di benessere sociale che soddisfa A1, A2, A3, A4 e A5, è opportuno premettere alcune definizioni e alcune considerazioni preliminari.

Si dice che un insieme D di individui ($D \subset C$) è *decisivo per l'alternativa* x *rispetto all'alternativa* y se e solo se, se per tutti gli $h \in D$ vale xP_hy, allora xPy (ossia se basta che gli individui di D preferiscano x a y affinché nella graduatoria collettiva x sia preferito a y).
Se tale insieme decisivo si riduce ad avere un solo elemento, si dice che tale elemento è un *dittatore per l'alternativa* x *rispetto all'alternativa* y. Un *dittatore* è un individuo che da solo determina un insieme decisivo rispetto a qualsiasi coppia di alternative. A5 afferma che non esiste un dittatore.

Si osservi che, *per ogni coppia di alternative* x *e* y, *esiste almeno un insieme decisivo per* x *rispetto a* y. Basta osservare che, in base alla proprietà di Pareto P, l'insieme C di tutti gli individui è decisivo per x rispetto a y.

Dimostriamo ora il seguente Lemma:

condizione necessaria e sufficiente affinché un insieme D *sia decisivo per l'alternativa* x *rispetto all'alternativa* y *è che si abbia*:

(*) *se per ogni* $h \in D$, xP_hy, *e per ogni* $h \notin D$, yP_hx, *allora* xPy.

La condizione è necessaria. Se D è decisivo per l'alternativa x rispetto all'alternativa y, allora evidentemente vale la condizione (*): basta l'ipotesi che per ogni $h \in D$ valga xP_hy, per concludere che xPy.
La condizione è sufficiente [7]. Se vale (*), allora xPy per tutte le n-ple di graduatorie individuali in cui x è preferito a y dagli elementi di D e y è

[7] Il lettore non si lasci ingannare dalla "naturalezza" della condizione (*). Si può vedere che, in assenza di A3 e A4, vi sono insiemi D per cui vale (*), ma che non sono decisivi

preferito a x dagli elementi del complementare di D. Per dimostrare che D è decisivo per x rispetto a y si può ragionare come nella dimostrazione della proprietà di Pareto. In base ad A4 la posizione di x e y nella graduatoria collettiva dipende solo dalle posizioni di x e y nelle graduatorie individuali. Se abbiamo una n-pla di graduatorie individuali in cui (almeno) gli elementi di D preferiscono x a y, tale n-pla si può pensare ottenuta da quella in cui *solo* gli elementi di D preferiscono x a y (ossia per cui vale l'ipotesi di (*)), migliorando la posizione di x. Per A3 non cambia la posizione di x e y nella graduatoria collettiva e, per (*), x è preferito a y. Quindi D è decisivo.

Il risultato fondamentale, da cui poi il teorema di Arrow segue facilmente, è il seguente:
Se un insieme D *è decisivo per l'alternativa* x *rispetto all'alternativa* y, *allora è decisivo per qualsiasi altra coppia ordinata di alternative.*
Dimostrazione. Per ipotesi D è decisivo per la coppia ordinata (x, y). Per dimostrare che D è decisivo rispetto alle altre coppie procediamo per casi. Nel corso della dimostrazione useremo spesso implicitamente A4.

a) Sia z un'alternativa diversa da x e da y.
Consideriamo una qualsiasi n-pla di graduatorie individuali tale che:
per ogni $h \in D$, xP_hy e yP_hz (e quindi anche xP_hz[8])
per ogni $h \notin D$, yP_hz e zP_hx (e quindi anche yP_hx)
Dato che D è decisivo per (x, y), nella graduatoria collettiva si ha xPy. Poiché, per ogni $h \in C$, yP_hz, per la proprietà di Pareto, nella graduatoria collettiva si ha yPz. Da xPy e yPz segue xPz per la proprietà transitiva. Vale quindi: se per ogni $h \in D$ vale xP_hz e per ogni $h \notin D$ vale zP_hx, allora xPz. Per il Lemma, ne segue che D è decisivo per la coppia (x, z) con z qualsiasi.

b) Siano ora z e z' due qualsiasi alternative diverse da x.
Consideriamo una qualsiasi n-pla di graduatorie individuali tale che:
per ogni $h \in D$, zP_hx e xP_hz' (e quindi anche zP_hz')

---

per x rispetto a y. Ad esempio, intuitivamente, se migliorando la sua posizione un'alternativa può non essere più preferita a un'altra nella graduatoria collettiva (cioè se non vale A3), può capitare che valga (*), ma quando x migliora la sua posizione (x diviene preferito a y anche nella graduatoria di qualche individuo del complementare di D), può non essere più preferito a y nella graduatoria collettiva. Lo stesso può capitare se non vale A4, ossia se i rapporti con le altre alternative influenzano le preferenze nella graduatoria collettiva.

[8] Ricordiamo che le relazioni di preferenza e di indifferenza (individuali e collettiva) godono della proprietà transitiva.

per ogni $h \notin D$, $z'P_hz$ e zP_hx (e quindi anche $z'P_hx$)

Per quanto dimostrato in a), D è decisivo per la coppia (x, z'), e quindi, nella graduatoria collettiva, xPz'. Come in a), per la condizione di Pareto si ha zPx, e quindi zPz' (per la proprietà transitiva), e allora dal Lemma segue che D è decisivo per la coppia (z, z') con z e z' qualsiasi (diverse da x).

c) Sia z un'alternativa qualsiasi diversa da x.

Consideriamo una terza alternativa qualsiasi z' e una qualsiasi n-pla di graduatorie individuali tale che:

per ogni $h \in D$, zP_hz' e $z'P_hx$ (e quindi anche zP_hx)

per ogni $h \notin D$, $z'P_hx$ e xP_hz (e quindi anche $z'P_hz$)

Essendo, per quanto visto nel caso b), D decisivo per la coppia (z, z') si ha zPz'; dalla proprietà di Pareto segue z'Px, e quindi zPx per la proprietà transitiva. Per il Lemma, D è decisivo per la coppia (z, x) con z qualsiasi.

Quindi D è decisivo per le coppie (x, z), (z, z') e (z, x) con z e z' qualsiasi, e allora è decisivo per tutte le coppie.

Da questo teorema segue che *se un individuo è un dittatore per la coppia di alternative* (x, y), *allora è un dittatore* (*e la legge di benessere sociale è dittatoriale*).

Possiamo ora dimostrare finalmente il teorema di Arrow, ottenendo una contraddizione dal supporre che la legge di benessere sociale soddisfi tutti gli assiomi A1, A2, A3, A4 e A5.

Consideriamo una coppia qualsiasi di alternative (x, y). Come si è osservato in precedenza, per la condizione di Pareto, l'insieme C è decisivo per x rispetto a y. Ne segue che *esiste un insieme decisivo minimale* (ossia che non ha sottoinsiemi propri decisivi) per la coppia (x, y) . Infatti, se C non è minimale, allora ha un sottoinsieme proprio decisivo C'; se C' non è minimale, allora ha un sottoinsieme proprio decisivo C", e così via; trattandosi di insiemi finiti, il procedimento si arresta al massimo quando si perviene a un insieme decisivo di un elemento. D'altra parte, un insieme decisivo di un elemento, come consegue dal teorema precedente, è un dittatore. Poiché, per ipotesi, vale A5, ossia non esiste un dittatore, l'insieme decisivo minimale, che indichiamo con D e che, per il teorema precedente è decisivo per tutte le coppie di alternative, deve contenere almeno due elementi. Si può allora suddividere D in due sottoinsiemi disgiunti D' e D". Date tre alternative x, y e z, consideriamo una qualsiasi n-pla di graduatorie individuali tale che:

per ogni $h \in D'$, xP_hy e yP_hz (e quindi anche xP_hz)

per ogni $h \in D''$, zP_hx e xP_hy (e quindi anche zP_hy)

per ogni $h \in D$, yP_hz e zP_hx (e quindi anche yP_hx)

(Al lettore attento non sarà sfuggito che D', D" e il complementare di D hanno le preferenze come i tre amici A, B e C dell'esempio iniziale del nostro precedente articolo).
Osserviamo che, nella graduatoria collettiva, deve essere xPy dato che l'insieme D è decisivo per coppia (x, y).
Nella graduatoria collettiva non può essere zPy, altrimenti D" sarebbe decisivo per la coppia (z, y) (e quindi per tutte le coppie), contro l'ipotesi che D sia decisivo minimale. Se fosse yPz, allora da xPy seguirebbe xPz, e allora D' sarebbe decisivo per la coppia (x,z), contro la minimalità di D. Non può nemmeno essere yIz, poiché da xPy e yIz seguirebbe nuovamente xPz. Si ha quindi l'assurdo che le alternative y e z non possono essere ordinate nella graduatoria collettiva (non può valere nessuna delle tre condizioni yPz, zPy e yIz).

Il teorema di Arrow è noto anche come "paradosso di Arrow" in quanto si può enunciare nel modo seguente: se una legge di benessere sociale soddisfa le condizioni di completezza, di sovranità dei cittadini, di correlazione positiva e di invarianza delle alternative irrilevanti, allora è dittatoriale (non è democratica). E questo, come si è detto, nonostante le prime quattro proprietà appaiano del tutto ragionevoli.
Non entriamo ora nel merito di come si possano "aggirare" le difficoltà sollevate dal teorema di Arrow, dato che il nostro obiettivo principale era quello di fornirne una dimostrazione. Rinviamo pertanto il lettore a [1], dal quale abbiamo tratto l'ossatura della dimostrazione e a [3] che, oltre a presentare una dimostrazione leggermente diversa del teorema di Arrow, dedica ampio spazio a discuterne le conseguenze. In particolare, in quest'ultimo volume, si dimostra che la regola della maggioranza[9] soddisfa tutti gli assiomi eccetto A4 (e anche A4 quando vi sono solo due alternative) ed è l'unica che soddisfa certe condizioni che sono meno restrittive degli assiomi di Arrow.

Bibliografia

[1] G. Dall'Aglio, "Decisioni di gruppo: il paradosso di Arrow", *Archimede* **34** (1982), pp. 3-14.

[9] Una legge di benessere sociale si basa sulla regola di maggioranza se si ha xPy quando gli individui che preferiscono x a y sono in numero maggiore di quelli che preferiscono y a x, e xIy se gli individui che preferiscono x a y sono tanti quanti quelli che preferiscono y a x.

[2] P. Hoffman, *La vendetta di Archimede. Gioie e insidie della matematica*, Bompiani, Milano, 1990; in particolare il Cap.12, "La democrazia è matematicamente impossibile?", pp. 211-244.
[3] M. D. Resnik, *Scelte. Introduzione alla teoria delle decisioni*, Franco Muzzio Editore, Padova, 1990; in particolare il Cap.6, "Scelte sociali", pp. 279-333.