CAPITOLO SECONDO - LOGICA DEI PREDICATI

1. Dalla logica proposizionale alla logica dei predicati. Nel primo capitolo abbiamo esaminato come si riconosce la correttezza delle regole del calcolo proposizionale, ossia di regole in cui intervengono unicamente forme proposizionali. Si tratta di forme di inferenza in cui sono rilevanti solo i connettivi vero-funzionali che compaiono nelle proposizioni composte che costituiscono le premesse e la conclusione. In esse non hanno alcun ruolo le *strutture interne* delle proposizioni che abbiamo indicato con le lettere A, B, C,... La correttezza di molte inferenze si basa invece sulla struttura interna delle proposizioni semplici che intervengono in esse. Ad esempio, nella seguente inferenza:

$$\frac{\begin{array}{l}\text{“Tutti i liguri sono italiani”}\\ \text{“Tutti gli italiani sono europei”}\end{array}}{\text{“Tutti i liguri sono europei”}}$$

tutte e tre le proposizioni (le due premesse e la conclusione) sono semplici. L'evidente correttezza dell'inferenza si basa sul fatto che le premesse (che sono proposizioni quantificate universalmente) contengono al loro *interno* una stessa proprietà ("essere italiano") che consente di collegare nella conclusione (che è anch'essa una proposizione quantificata universalmente) le altre due proprietà ("essere ligure" e "essere europeo"). Indicando le tre proprietà con P, Q e R, la forma logica della precedente inferenza è, come vedremo, la seguente:

$$\frac{\begin{array}{ll}\forall x(Px \to Qx) & \text{(per ogni } x\text{, se } Px \text{ allora } Qx)\\ \forall x(Qx \to Rx) & \text{(per ogni } x\text{, se } Qx \text{ allora } Rx)\end{array}}{\begin{array}{ll}\forall x(Px \to Rx) & \text{(per ogni } x\text{, se } Px \text{ allora } Rx)\end{array}}$$

Una giustificazione intuitiva della regola è la seguente. Supponiamo che in un certo dominio siano vere le premesse. Se è a un individuo preso a caso nel dominio, ciò che vale "per ogni x" vale ovviamente anche per a, per cui sono vere le due proposizioni:

$$Pa \to Qa$$
$$Qa \to Ra$$

Da esse segue, per la "regola (proposizionale) di concatenazione" (da $A \to B$ e $B \to C$ segue logicamente $A \to C$) che:

$$Pa \to Ra.$$

Dato che a è un individuo generico, dalla verità dell'ultima proposizione segue quella di:

$\forall x(Px \to Rx)$, ossia della conclusione.

Quest'ultimo "passaggio" può suscitare qualche perplessità, ed è opportuno riflettere un momento su di esso. Se è ovvio che ciò che vale "per ogni x", vale per ciascun individuo singolarmente, non è vero il viceversa: ciò che vale per un individuo non vale, in generale, per tutti gli individui (da "Carlo è ligure" non è ovviamente lecito dedurre che "Tutti sono liguri"). Tuttavia, per dimostrare che una proprietà vale per tutti gli individui di un certo insieme, spesso la si dimostra per "un unico" individuo: il procedimento è lecito se non si sfrutta nessuna proprietà particolare di tale individuo. Si rifletta su come si dimostrano normalmente i teoremi di geometria, ad esempio: "In ogni triangolo la somma degli angoli interni è due retti". Di solito la dimostrazione inizia così: "Sia ABC un triangolo (vedi la figura). Dal punto C tracciamo...". La dimostrazione viene condotta sul triangolo ABC e alla fine si perviene a dimostrare che la somma degli angoli interni di ABC è due retti. In tal modo il teorema è dimostrato in quanto ciò che vale per ABC vale per ogni triangolo, dato che nella dimostrazione non si è sfruttata alcuna proprietà caratteristica di quel particolare triangolo tracciato nella figura (come potrebbe essere quella di avere un angolo di 47° o di avere il lato AB parallelo al lato della lavagna o del foglio). Di solito, si invita lo studente a non disegnare un triangolo isoscele. In effetti, la dimostrazione è corretta anche se la figura è "un caso particolare", purché non si sfrutti che il triangolo è isoscele.

2. Analisi logica delle proposizioni semplici

***Definizione* 1**. Le **proposizioni semplici del primo tipo** sono proposizioni in cui un predicato a n argomenti viene attribuito ad n individui.

Esempi. "Carlo è italiano", "3 è pari", "Elisa ama Massimo", "Savona è tra Genova e Imperia", "La commissione è composta da Carlo, Dario, Evandro, Michele".

***Definizione* 2**. I due quantificatori “per ogni” ed “esiste” sono detti rispettivamente **quantificatore universale** e **quantificatore esistenziale**:

“per ogni x,...” significa: ***tutti*** gli individui soddisfano ...

“esiste x,...” significa: ***vi è almeno un*** individuo che soddisfa ...

***Definizione* 3**. Nella forma logica delle proposizioni contenenti quantificatori intervengono lettere, quali x, y, z.... che prendono il nome di **variabili individuali** (o più semplicemente **variabili**).

***Definizione* 4**. Le proposizioni semplici che iniziano con “per ogni” si dicono **quantificate universalmente**, quelle che iniziano con “esiste” si dicono **quantificate esistenzialmente**.

***Definizione* 5**. Le **proposizioni semplici del secondo tipo** sono le proposizioni quantificate universalmente ed esistenzialmente.
Esempi. “Tutti gli uomini sono mortali”, “Qualche italiano è buddista”, “Ogni uomo ha una madre”, “Vi è una donna amata da tutti”.

Si dice ***logica dei predicati del primo ordine*** quella in cui si introducono nomi per individui e per predicati e le variabili sono solo quelle individuali (e quindi si possono quantificare universalmente o esistenzialmente solo le variabili individuali). Se si introducono anche variabili per predicati e nomi per “predicati di predicati” (e quindi si possono quantificare anche le variabili predicative) si passa alla ***logica dei predicati del secondo ordine***.

3. Linguaggio della logica dei predicati del primo ordine

Il linguaggio delle logica dei predicati è costituito dall’*alfabeto* e dall’insieme delle *formule ben formate*.

• L’***alfabeto*** della logica dei predicati è costituito da:

(a) costanti individuali: a, b, c,....
(b) variabili individuali: x, y, z,...
(c) costanti predicative: P, Q, R,...
(d) simboli per i connettivi proposizionali: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$
(e) simboli per i quantificatori universale ed esistenziale: $\forall$ (per ogni) e $\exists$ (esiste)
(f) parentesi aperta e chiusa: (e).

• Le ***formule ben formate*** (**fbf**) della logica dei predicati sono stringhe di simboli dell’alfabeto. Ad esempio: Pa, Qb, Rab, $\neg Rab$, $\exists xRax$, $Rab \wedge \neg Rba$, $Rba \vee Rbc$, $\exists xRax \rightarrow Rab$, $\forall xRxb \wedge \neg\exists yRby$, $\forall xRxa \leftrightarrow \forall yRyb$, $\exists xRxa \wedge \exists y\neg Ryb$ (per evitare troppe parentesi si assume per convenzione che i quantificatori legano più strettamente dei connettivi).

Tutte queste fbf hanno la caratteristica di non contenere variabili libere (tutte le variabili individuali sono vincolate da quantificatori, ossia nel raggio d’azione del quantificatore). Per questa ragione sono dette ***chiuse***. Nel seguito avremo quasi sempre a che fare con fbf chiuse, per cui sottintenderemo spesso tale attributo. Nelle regole di inferenza, infatti, compaiono le fbf chiuse che formalizzano le premesse e la conclusione delle inferenze.

Le fbf non chiuse sono dette ***aperte*** e contengono variabili libere; ad esempio sono fbf aperte: Px, Rxy, Rxc, $Pa \wedge Qx$, $Rax \vee Rby$, $\forall yRxy$ (x è libera), $\exists xRxy$ (y è libera), $\exists xRax \rightarrow Ray$ (y è libera). Si noti anche che in $\forall xPx \rightarrow Qx$ la x di Px è vincolata dal quantificatore universale e la x di Qx è libera: in tal caso la fbf è aperta e x è libera.

Le fbf aperte, come si è detto, non rappresentano proposizioni, ma predicati (a tanti argomenti quante sono le variabili libere). Ad esempio Px, Rxc, $Pa \wedge Qx$, $\forall yRxy$, $\exists xRxy$, $\exists xRax \rightarrow Ray$ formalizzano predicati ad un argomento (proprietà): nelle prime quattro è libera la variabile x e nelle ultime due è libera la variabile y. Nelle fbf Rxy e $Rax \vee Rby$ sono libere entrambe le variabili x e y e quindi esse formalizzano predicati a due argomenti (relazioni binarie).

Nel seguito indichiamo con A(x) e B(x) fbf aventi x come variabile libera. Con A(a) si intende la fbf chiusa ottenuta sostituendo le occorrenze della variabile libera x con la costante individuale a. In questi casi si può usare anche un’altra variabile o un’altra costante.

Esempi. La proposizione “Elisa ama Massimo” si può formalizzare, ad esempio, con Rab (dove R indica la relazione binaria di “amare”, a sta per “Elisa” e b per “Massimo”). Se scriviamo Rxb, Ray e Rxy abbiamo tre espressioni che formalizzano i tre predicati “x ama Massimo” (proprietà), “Elisa ama y” (proprietà), “x ama y” (relazione binaria). Le proposizioni semplici:

(1) “Vi è qualcuno che ama Massimo” (2) “Tutti amano Massimo”

(3) “Vi è qualcuno che Elisa ama” (4) “Elisa ama tutti”
(5) “Tutti sono amati da qualcuno” (6) “Tutti amano qualcuno”
(7) “Vi è qualcuno che ama tutti” (8) “Tutti amano se stessi”

si formalizzano rispettivamente nel modo seguente:

(1) $\exists xRxb$ (2) $\forall xRxb$ (3) $\exists yRay$ (4) $\forall yRay$
(5) $\forall y\exists xRxy$ (6) $\forall x\exists yRxy$ (7) $\exists x\forall yRxy$ (8) $\forall xRxx$

Le proposizioni composte:

(9) “Elisa non ama Massimo”
(10) “Elisa ama Massimo e Massimo non ama Elisa”
(11) “Se Elisa ama qualcuno, allora Elisa ama Massimo”
(12) “Massimo ama Elisa o Sabrina”
(13) “Tutti amano Massimo e Massimo non ama nessuno”
(14) “Tutti amano Elisa se e solo se tutti amano Massimo”
(15) “Qualcuno ama Elisa e qualcuno non ama Massimo”

si formalizzano rispettivamente come segue:

(9) $\neg Rab$ (10) $Rab \wedge \neg Rba$ (11) $\exists xRax \rightarrow Rab$ (12) $Rba \vee Rbc$
(13) $\forall xRxb \wedge \neg\exists yRby$ (14) $\forall xRxa \leftrightarrow \forall yRyb$ (15) $\exists xRxa \wedge \exists y\neg Ryb$

4. Le quattro regole logiche fondamentali per i quantificatori

Nella logica dei predicati continuano a valere le regole corrette della logica proposizionale: basta che si considerino *A*, *B*, *C*,... non come lettere proposizionali, ma come fbf chiuse qualsiasi. In questo paragrafo introduciamo quattro regole logiche relative ai quantificatori, dette regole di eliminazione e di introduzione del quantificatore universale e esistenziale, le quali, unitamente alle regole del calcolo proposizionale, consentono di giustificare *tutte* le altre regole logiche della logica dei predicati del primo ordine.

(**A**) ***Regola di eliminazione del quantificatore universale***

$$\frac{\forall x\mathrm{A}(x)}{\mathrm{A}(a)}$$

Tale regola è evidentemente corretta: se è vero che tutti hanno la proprietà formalizzata da A(x), ne segue logicamente che anche un individuo particolare ha tale proprietà.

(**B**) ***Regola di introduzione del quantificatore universale***

$$\frac{\mathrm{A}(a)}{\forall x\mathrm{A}(x)}$$

Evidentemente tale regola non è corretta: come si è già osservato in precedenza, se è vero che un individuo *a* ha la proprietà A(x) non è detto che tutti abbiano tale proprietà. Essa va applicata nel modo seguente: *se si è correttamente dedotto* A(a) *in una dimostrazione* (*derivazione*) *e non si è usata nessuna ipotesi relativa ad a, allora si può correttamente dedurre* $\forall x$A(x).

(**C**) ***Regola di introduzione del quantificatore esistenziale***

$$\frac{\mathrm{A}(a)}{\exists x\mathrm{A}(x)}$$

Tale regola è evidentemente corretta: se è vero che un individuo *a* ha la proprietà A(x), ne segue logicamente che esiste un individuo che ha tale proprietà.

(**D**) ***Regola di eliminazione del quantificatore esistenziale***

$$\frac{\exists x\mathrm{A}(x)}{\mathrm{A}(a)}$$

Evidentemente tale regola non è corretta: se è vero che esiste un individuo con la proprietà A(x) non è detto che un determinato individuo *a* abbia tale proprietà. Essa va applicata nel modo seguente: se si è dedotto correttamente $\exists x$A(x), allora si può indicare con *a* l’individuo che si è dimostrato esistere e scrivere A(a), *purché su a non si sia in precedenza formulata alcuna ipotesi*.

5. Regole logiche che regolano i rapporti fra i quantificatori e i connettivi

(A) Quantificatori e negazione

Vediamo in primo luogo come si esegue la negazione delle proposizioni quantificate. Consideriamo la proposizione (falsa): “Tutti i liguri sono genovesi”.
La sua negazione (che è una proposizione vera) si può esprimere sia anteponendo “non”:
“Non tutti i liguri sono genovesi”,
sia nel modo seguente:
“Esistono dei liguri che non sono genovesi”.
Pertanto:

“non per ogni *x* ...” equivale a **“esiste *x* non...”**

In formula: $\boxed{\neg\forall x A(x) \text{ equivale a } \exists x \neg A(x)}$

Consideriamo ora la proposizione (falsa): “Esiste un ligure che è piemontese”.
La sua negazione (che è una proposizione vera) si può esprimere sia anteponendo “non”:
“Non esiste un ligure che è piemontese”
sia nel modo seguente:
“Ogni ligure non è piemontese”
Pertanto:

“non esiste *x*....” equivale a **“per ogni *x* non...”**

In formula: $\boxed{\neg\exists x A(x) \text{ equivale a } \forall x \neg A(x)}$

Molto spesso, in lingua italiana, anziché “Non esiste un ligure che è piemontese” o “Ogni ligure non è piemontese”, si dice “Nessun ligure è piemontese”. Si noti quindi che “nessuno” equivale a “non esiste” e *non* è la negazione di “ogni” (“tutti”): la negazione di “Ogni uomo è intelligente” è “Esiste un uomo che non è intelligente” e la negazione di “Nessun uomo è intelligente” è “Esiste un uomo intelligente”.

Dalle due equivalenze precedenti, negando ambo i membri e applicando la legge della doppia negazione, si ottiene che:

$$\boxed{\forall x A(x) \text{ equivale a } \neg\exists x \neg A(x)}$$

$$\boxed{\exists x A(x) \text{ equivale a } \neg\forall x \neg A(x)}$$

Quindi “Tutti gli individui hanno la proprietà...” equivale a “Non esiste un individuo che non ha la proprietà...” e “Esiste un individuo che ha la proprietà...” equivale a “Non tutti gli individui non hanno la proprietà...”. Ad esempio la proposizione “Tutti gli italiani sono europei” equivale a “Non esiste un italiano che non è europeo” e “Esiste un italiano buddista” equivale a “Non tutti gli italiani non sono buddisti”.

Le due equivalenze precedenti stabiliscono che si può definire uno dei due quantificatori in funzione dell’altro: il quantificatore universale si può definire mediante il quantificatore esistenziale e la negazione (“per ogni” = “non esiste non”) e, analogamente, il quantificatore esistenziale si può definire mediante il quantificatore universale e la negazione (“esiste” = “non per ogni non”).

Pertanto, sono corrette le seguenti regole:

(a) $\dfrac{\neg\forall x A(x)}{\exists x \neg A(x)}$ (b) $\dfrac{\exists x \neg A(x)}{\neg\forall x A(x)}$ (c) $\dfrac{\neg\exists x A(x)}{\forall x \neg A(x)}$ (d) $\dfrac{\forall x \neg A(x)}{\neg\exists x A(x)}$

(e) $\dfrac{\neg\forall x \neg A(x)}{\exists x A(x)}$ (f) $\dfrac{\neg\exists x \neg A(x)}{\forall x A(x)}$ (g) $\dfrac{\neg\exists x \neg A(x)}{\forall x A(x)}$ (h) $\dfrac{\neg\forall x \neg A(x)}{\exists x A(x)}$

(B) Quantificatori e congiunzione

Sono corrette le tre seguenti regole

(a) $\dfrac{\forall x (A(x) \wedge B(x))}{\forall x A(x) \wedge \forall x B(x)}$ (b) $\dfrac{\forall x A(x) \wedge \forall x B(x)}{\forall x (A(x) \wedge B(x))}$ (c) $\dfrac{\exists x (A(x) \wedge B(x))}{\exists x A(x) \wedge \exists x B(x)}$

mentre *non* è corretta la regola:

(d) $\dfrac{\exists x A(x) \wedge \exists x B(x)}{\exists x(A(x) \wedge B(x))}$

(C) Quantificatori e disgiunzione

Sono corrette le tre seguenti regole

(a) $\dfrac{\exists x(A(x) \vee B(x))}{\exists x A(x) \vee \exists x B(x)}$ (b) $\dfrac{\exists x A(x) \vee \exists x B(x)}{\exists x(A(x) \vee B(x))}$ (c) $\dfrac{\forall x A(x) \vee \forall x B(x)}{\forall x(A(x) \vee B(x))}$

mentre *non* è corretta la regola:

(d) $\dfrac{\forall x(A(x) \vee B(x))}{\forall x A(x) \vee \forall x B(x)}$

(D) Quantificatori e condizionale

Sono corrette le due seguenti regole

(a) $\dfrac{\forall x(A(x) \to B(x))}{\forall x A(x) \to \forall x B(x)}$ (b) $\dfrac{\exists x A(x) \to \exists x B(x)}{\exists x(A(x) \to B(x))}$

ma *non* sono corrette le regole:

(c) $\dfrac{\forall x A(x) \to \forall x B(x)}{\forall x(A(x) \to B(x))}$ (d) $\dfrac{\exists x(A(x) \to B(x))}{\exists x A(x) \to \exists x B(x)}$

Sono corrette le quattro seguenti regole (in cui B è una qualsiasi fbf chiusa):

(e) $\dfrac{\exists x(A(x) \to B)}{\forall x A(x) \to B}$ (f) $\dfrac{\forall x A(x) \to B}{\exists x(A(x) \to B)}$

(g) $\dfrac{\forall x(A(x) \to B)}{\exists x A(x) \to B}$ (h) $\dfrac{\exists x A(x) \to B}{\forall x(A(x) \to B)}$

ESERCIZI RELATIVI AL CAPITOLO SECONDO (LOGICA DEI PREDICATI)

1. Determinare la forma logica delle seguenti proposizioni semplici del secondo tipo:
(a) “Angelo rispetta tutti” (b)“Angelo è rispettato da tutti”
(c) “Chi rispetta Angelo, rispetta tutti” (d)“Chi rispetta qualcuno, allora rispetta Angelo”
(e) “Tutti si rispettano” (f) “Tutti rispettano qualcuno”
(g) “Chiunque rispetta se stesso, allora rispetta Angelo”
(h) “Se c’è qualcuno che rispetta se stesso, quello è Angelo” (i) “Qualcuno è rispettato da tutti”
(l) “Qualcuno rispetta solo se stesso” (m) “C’è qualcuno che solo Angelo rispetta”

2. Determinare quali delle seguenti espressioni sono proposizioni e quali predicati e formularli senza far uso delle variabili:
(a) “Per ogni *x*, se *x* è studente di Logica, allora *x* ha superato l’esame”
(b) “*x* è studente di Logica e *x* ha superato l’esame”
(c) “Per ogni *x*, se *x* è studente, il professore di Logica ha promosso *x*”
(d) “Per ogni *x*, se *x* è studente e *y* è professore, allora *y* ha promosso *x*”
(e) “Esiste *y* tale che *y* è professore e *y* ha promosso *x*”
(f) “Se *x* è un professore e *y* è uno studente, *x* ha promosso *y*”
(g) “Per ogni *x*, se *y* è studente e *x* è professore di *y*, *x* ha promosso *y*”
(h) “*x* è professore e per ogni *y*, se *y* è studente di *x*, allora *x* ha promosso *y*”
(i) “Esiste *x* tale che *x* è professore e per ogni *y*, se *y* è studente di *x*, allora *x* ha promosso *y*”
(l) “Esiste *x* tale che *x* è professore e *y* è studente di *x*”
(m) “Per ogni *y*, se *y* è studente, allora esiste *x* tale che *x* è professore e *y* è studente di *x*”

3. Determinare quali delle seguenti proposizioni sono semplici e quali sono composte:
(a) “Stefano è più alto di Carlo” (b)“Stefano è alto e Carlo è basso”
(c) “Tutti sono più alti di Carlo” (d)“Non tutti sono più alti di Carlo”
(e) “Se Carlo ha rubato la marmellata sarà punito”
(f) “Chiunque ha rubato la marmellata sarà punito
(g) “Carlo e chiunque ha rubato la marmellata sarà punito”
(h) “Vi è sia un cane bassotto sia un cane pechinese”
(l) “Vi è un cane bassotto che è tutto bagnato” (m) “Non vi è alcun cane bassotto”

4. Usando costanti individuali e predicative e i connettivi proposizionali formalizzare le seguenti proposizioni:
(a) “Claudia è intelligente” (b)“Claudia è sorella di Elisa”
(c) “Giorgio è amico di Andrea e di Stefano”
(d) “Giorgio è compaesano di Filippo o di Margherita”
(e) “Se Giovanni è coetaneo di Aldo, allora è coetaneo di Umberto”
(f) “Elisa e Claudia sono amiche di Sabrina”
(g) “Angelo sarà assunto se e solo se non deve fare il militare”
(h) “Se Carlo incontra Michele, gli parlerà e, se non lo incontra, gli telefonerà”
(i) “Savona è tra Ventimiglia e Genova, non lontana da Genova”
(l) “Savona, essendo tra Imperia e Genova, è anche tra Ventimiglia e Genova”
(m) “6 è il prodotto di 2 e 3 ed è la somma di 1 e 5”
(n) “*C* è punto medio di *A* e *B* se e solo se è punto medio di *B* e *A*”
(o) “I punti *A*, *B*, *C* e *D* sono vertici di un rombo, ma non di un quadrato”
(p) “Se i punti *A*, *B*, *C* e *D* sono vertici di un rombo, allora sono vertici di un parallelogramma”

5. Usando costanti individuali e predicative, variabili individuali, i connettivi e i quantificatori formalizzare le seguenti proposizioni:
(a) “A qualcuno piace Simona” (b) “Simona non piace a nessuno”
(c) “Nessuno ama Davide e Davide ama Maria” (d) “Se Davide ama qualcuno, allora ama Maria”
(e) “Chiunque ama Davide ama anche Maria” (f) “Chiunque ama Davide se e solo se ama Maria”
(g) “Se qualcuno ama Davide, allora è amato da Maria” (h)“Chiunque ama Davide o Maria”
(i) “Chi ama Maria non ama Davide” (l) “Chiunque ama Davide e Maria ama se stesso”

(m) "Solo se qualcuno ama Maria, tutti sono amati da Davide"

6. Usando costanti individuali e predicative, variabili individuali, i connettivi e i quantificatori formalizzare le seguenti proposizioni:

(a) "Tutti i professori hanno letto la Divina Commedia"
(b) "Chiunque si impegna supererà l'esame di logica"
(c) "Se Aldo capirà la logica, allora tutti gli studenti la capiranno"
(d) "Nessuno studente capirà la logica a meno che Aldo la capisca"
(e) "Ogni professore è apprezzato dagli studenti che capiscono la logica"
(f) "Tutti i professori, tranne quelli di logica, sono noiosi e qualche professore di logica è noioso"
(g) "Se un professore non insegna bene la logica, gli studenti non la capiranno"
(h) "Vi è almeno uno studente che capirà la logica e sarà apprezzato da tutti i professori"
(i) "Vi è almeno uno studente che capirà la logica e uno studente che sarà apprezzato da tutti i professori"
(l) "Ogni professore è apprezzato da qualche studente e qualche professore è apprezzato da tutti gli studenti"
(m) "Ogni professore annoia qualche studente e gli studenti che capiscono tutto sono annoiati da qualunque professore"

7. Sia D l'insieme delle regioni italiane e si interpretino a in "Liguria", b in "Lazio", c in "Sicilia", P nella proprietà "essere un'isola", Q nella proprietà "essere una regione dell'Italia settentrionale" e R nella relazione "essere a Sud di". Stabilire se sono vere o false le seguenti fbf:

(a) Pa (b) Pb (c) Pc (d) Qa (e) Qb
(f) Qc (g) Rab (h) Raa (i) Rca (l) $\neg Pb \wedge \neg Qb$
(m) $Qc \rightarrow Pb$ (n) $\neg Pa \leftrightarrow Qa$ (o) $Pc \rightarrow Qc$ (p) $\forall x Px$
(q) $\exists y Qy$ (r) $\forall x(Px \vee Qx)$ (s) $\exists x \forall y Rxy$

8. Sia $D = \{2, 3, 6, 9, 18\}$ e si interpretino a in "2", b in "3", c in "18", P nella proprietà di "essere dispari" e R nella relazione di "essere multiplo". Stabilire se sono vere o false le seguenti fbf:

(a) Pa (b) Pb (c) Rab (d) Raa (e) Rca
(f) $\neg Pb \vee Pc$ (g) $Rac \rightarrow Pa$ (h) $Rbb \rightarrow \neg Rba$
(i) $\exists x(Px \wedge Rxc)$ (l) $\exists x \forall y Rxy \wedge \forall y \exists x Rxy$ (m) $\exists x \forall y Ryx$
(n) $\forall x(Px \rightarrow Rxb)$ (o) $\exists x(Rxc \wedge Px)$ (p) $\forall x Rxx$

9. In un dominio D e in una interpretazione sono vere tutte le seguenti fbf:

Pa, Pb, $\neg Pc$, Rab, $\neg Rac$, Rbc, Rcc

Determinare quali delle seguenti fbf sono sicuramente false:

(a) $\forall x Px$ (b) $\neg \exists x Rax$ (c) $\forall x Rbx$
(d) $\forall x \neg Rbx$ (e) $\forall x \neg Rcx$ (f) $\forall x \exists y \neg Rxy$

10. Giustificare, dopo averle formalizzate, le seguenti inferenze:

(a) "Nessun cane vola"
"Dumbo vola"
———
"Dumbo non è un cane"

(b) "Ogni ligure è italiano"
"Ogni italiano è europeo"
"Marco è ligure"
———
"Marco è europeo"

(c) "Ogni ligure è italiano"
"Ogni italiano è europeo"
"Esiste un ligure"
———
"Esiste un europeo"

(d) "Ogni belga è fiammingo o vallone"
"Il belga Van Bendem non è vallone"
———
"Il belga Van Bendem è fiammingo"

(e) "Ogni belga è fiammingo o vallone"
"Esiste un belga che non è vallone"
———
"Esiste un belga che è fiammingo"

(f) "Un numero positivo o negativo ha quadrato positivo"
"0 non ha quadrato positivo"
———
"Vi è un numero né positivo né negativo"

11. Stabilire se è corretta la seguente inferenza:

"Se Dio ha creato qualche cosa, allora Dio ha creato ogni cosa"
"Dio ha creato ogni cosa"
———
"Dio ha creato qualche cosa"

12. Giustificare le seguenti inferenze già formalizzate:

(a) $\dfrac{\forall x(Px \to Qx) \quad Pa \wedge Ra}{\exists x(Qx \wedge Rx)}$ (b) $\dfrac{\forall x(Px \to Qx) \quad \exists x \neg Qx}{\exists x \neg Px}$ (c) $\dfrac{\forall x(Px \vee Qx \to Rx) \quad \forall x \neg Rx}{\forall x \neg Px}$

13. Esprimere la negazione delle seguenti proposizioni:
(a) "Ogni cinese è asiatico" (b)"Esiste un cinese che è biondo"
(c) "Nessun europeo è americano" (d)"Tutti i cinesi non sono asiatici"
(e) "Nessun cinese non è asiatico"

14. Esprimere la negazione delle seguenti proposizioni:

(a) "Ogni vino è bianco o rosso" (b) "Ogni napoletano è allegro e ospitale"
(c) "Per ogni numero ne esiste uno minore" (d) "Esiste un numero maggiore di tutti gli altri"

15. Giustificare la seguente regola:

$$\frac{\forall x(Px \to Qx)}{\forall xPx \to \forall xQx}$$

16. Verificare che la seguente regola non è corretta:

$$\frac{\forall xPx \to \forall xQx}{\forall x(Px \to Qx)}$$

17. Giustificare la seguente inferenza:
"Tutti i gatti sono animali"
———
"Tutte le code di gatto sono code di animali"

18. Verificare la correttezza della seguente inferenza:
"Vi è un rettore d'università che è matematico, o fisico, o chimico. Non vi è alcun rettore d'università che è matematico o fisico. Quindi vi è un rettore d'università che è chimico".

19. Verificare la correttezza della seguente inferenza:
"Sandro e Paolo amano le stesse donne. Se Sandro ama una donna, allora è felice. Sandro non è felice. Quindi Paolo non ama nessuna donna".

20. Verificare la correttezza della seguente inferenza:
"Ogni barbiere rade tutti e soli quelli che non si radono da soli. Quindi non esiste alcun barbiere".

RISPOSTE

1. (a) "Per ogni *x*, Angelo rispetta *x*"
(b) "Per ogni *x*, *x* rispetta Angelo" ("Per ogni *x*, Angelo è rispettato da *x*")
(c) "Per ogni *x*, se *x* rispetta Angelo, allora, per ogni *y*, *x* rispetta *y*"
(d) "Per ogni *x*, se esiste *y* tale che *x* rispetta *y*, allora *x* rispetta Angelo"
(e) "Per ogni *x*, *x* rispetta *x*"
(f) "Per ogni *x*, esiste *y* tale che *x* rispetta *y*"
(g) "Per ogni *x*, se *x* rispetta *x*, allora *x* rispetta Angelo"
(h) "Se esiste *x* tale che *x* rispetta *x*, allora *x* è Angelo"
(i) "Esiste *x* tale che, per ogni *y*, *y* rispetta *x*" ("Esiste *x* tale che, per ogni *y*, *x* è rispettato da *y*")
(l) "Esiste *x* tale che, per ogni *y*, se *x* rispetta *y*, allora *y* è *x*"
(m) "Esiste *x* tale che, per ogni *y*, se *y* rispetta *x*, allora *y* è Angelo"

2. (a) è una proposizione ("Ogni studente di Logica ha superato l'esame")
(b) è la proprietà di "essere studente di Logica che ha superato l'esame"
(c) è una proposizione ("Il professore di Logica ha promosso tutti gli studenti")
(d) è la proprietà di "essere un professore che ha promosso tutti gli studenti"

(e) è la proprietà di “essere stato promosso da almeno un professore”
(f) è la relazione binaria che vale tra un professore e uno studente se il professore ha promosso lo studente
(g) è la proprietà di “essere studente promosso da ogni suo professore”
(h) è la proprietà di “essere professore che ha promosso tutti i suoi studenti”
(i) è una proposizione (“Vi è un professore che ha promosso tutti i suoi studenti”)
(l) è la proprietà di “essere studente di almeno un professore”
(m) è una proposizione (“Ogni studente è studente di qualche professore”)

3. Sono semplici (a), (c), (f), (l).

4. In questa risposta e nelle due successive usiamo costanti individuali e predicative che richiamano le iniziali delle parole formalizzate:
(a) Ic (b) Sce (c) $Aga \wedge Ags$ (d) $Cgf \vee Cgm$ (e) $Cga \rightarrow Cgu$ (f) $Aes \wedge Acs$
(g) $Aa \leftrightarrow \neg Ma$ (h) $(Icm \rightarrow Pcm) \wedge (\neg Icm \rightarrow Tcm)$ (i) $Tsvg \wedge \neg Lsg$ (l) $Tsig \wedge (Tsig \rightarrow Tsvg)$
(m) $Psdt \wedge Ssuc$ (n) $Mcab \leftrightarrow Mcba$ (o) $Rabcd \wedge \neg Qabcd$ (p) $Rabcd \rightarrow Pabcd$

5. (a) $\exists xPxs$ (b) $\neg\exists xPxs$ (oppure $\forall x\neg Pxs$) (c) $\neg\exists xAxd \wedge Adm$ (d) $\exists xAdx \rightarrow Adm$
(e) $\forall x(Axd \rightarrow Axm)$ (f) $\forall x(Axd \leftrightarrow Axm)$ (g) $\forall x(Axd \rightarrow Amx)$ (h) $\forall x(Axd \vee Axm)$
(i) $\forall x(Axm \rightarrow \neg Axm)$ (l) $\forall x(Axd \wedge Axm \rightarrow Axx)$ (m) $\forall xAdx \rightarrow \exists xAxm$

6. (a) $\forall x(Px \rightarrow Lxd)$ (b) $\forall x(Ix \rightarrow Sxl)$ (c) $Cal \rightarrow \forall x(Sx \rightarrow Cxl)$ (d) $\neg Cal \rightarrow \forall x(Sx \rightarrow \neg Cxl)$
(e) $\forall x(Px \rightarrow \forall y(Sy \wedge Cyl \rightarrow Axy))$ (f) $\forall x(Px \wedge \neg Ixl \rightarrow Nx) \wedge \exists x(Px \wedge Ixl \rightarrow Nx)$
(g) $\forall x(Px \wedge \neg Ixl \rightarrow \forall y(Sy \rightarrow \neg Cyl))$ (h) $\exists x(Sx \wedge Cxl \wedge \forall y(Py \rightarrow Axy))$
(i) $\exists x(Sx \wedge Cxl) \wedge \exists y(Sy \wedge \forall z(Pz \rightarrow Ayz))$ (m) $\forall x(Px \rightarrow \exists y(Sy \wedge Axy)) \wedge \forall x(Sx \wedge Cx \rightarrow \forall y(Py \rightarrow Ayx))$

7. Sono vere (c), (d), (i), (l), (m), (n), (q) e false le altre.

8. Sono vere (b), (d), (e), (g), (h), (l), (n), (o) (p) e false le altre.

9. (a), (b), (d) ed (e).

10. (a) L’inferenza ha la forma:

$$\frac{\begin{array}{c}\forall x(Px \rightarrow \neg Qx)\\ Qa\end{array}}{\neg Pa}$$

Eliminando il quantificatore universale, dalla prima premessa segue $Pa \rightarrow \neg Qa$ e quindi, per contrapposizione, $Qa \rightarrow \neg Pa$; da quest’ultima e dalla seconda premessa Qa segue $\neg Pa$ per modus ponens.

(b) Che da $\forall x(Lx \rightarrow Ix)$, $\forall x(Ix \rightarrow Ex)$, Lm segua Em si giustifica facilmente: eliminando il quantificatore universale dalle due premesse si ricava $Lm \rightarrow Im$ e $Im \rightarrow Em$, da cui, per concatenazione, si ricava $Lm \rightarrow Em$; da quest’ultima e da Lm segue Em per modus ponens.

(c) Che da $\forall x(Lx \rightarrow Ix)$, $\forall x(Ix \rightarrow Ex)$, $\exists xLx$ segua $\exists xEx$ si giustifica come segue: prima si elimina il quantificatore esistenziale da $\exists xLx$ e si ottiene La, da cui, procedendo come in (b), si ricava Ea, e infine $\exists xEx$ introducendo il quantificatore esistenziale.

(d) Da $\forall x(Fx \vee Vx)$ segue $Fa \vee Va$ eliminando il quantificatore universale; da $Fa \vee Va$ e $\neg Va$ segue Fa per la regola del sillogismo disgiuntivo.

(e) Che da $\forall x(Fx \vee Vx)$ e $\exists x\neg Vx$ segua $\exists xFx$ si giustifica come segue: eliminando il quantificatore esistenziale si trova $\neg Va$ e quindi, procedendo come in (d), si perviene a Fa, da cui segue $\exists xFx$ introducendo il quantificatore esistenziale.

(f) La formalizzazione dell’inferenza è:

$$\frac{\begin{array}{c}\forall x(Px \vee Nx \rightarrow Qx)\\ \neg Qa\end{array}}{\exists x(\neg Px \wedge \neg Nx)}$$

Per giustificarla si elimina il quantificatore universale dalla prima premessa e si ottiene $Pa \vee Na \rightarrow Qa$; da quest’ultima e $\neg Qa$ si ottiene, per modus tollens, $\neg(Pa \vee Na)$; per la legge di De Morgan segue $\neg Pa \wedge \neg Na$ da cui, per introduzione del quantificatore esistenziale, si ha $\exists x(\neg Px \wedge \neg Nx)$.

11. Si presti attenzione. Da un lato si sarebbe portati a concludere che l’inferenza non è corretta in quanto formalizzabile dalla regola scorretta della logica proposizionale: “da $A \rightarrow B$, B segue A” (che è la fallacia dell’affermazione del conseguente – si veda il §0.2). Tuttavia l’inferenza è corretta dato che la proposizione “Dio ha creato qualche cosa” ($\exists xCdx$, dove d sta per “Dio” e C per “aver creato”) è conseguenza logica di “Dio ha creato ogni cosa” ($\forall xCdx$) (si veda l’Esempio 6) e quindi, a maggior ragione, delle due premesse. Questo esempio illustra come la formalizzazione vada eseguita con attenzione ed è legata ai fini che si vogliono perseguire.

12.

(a)

(1)	$\forall x(Px \to Qx)$	(premessa)
(2)	$Pa \wedge Ra$	(premessa)
(3)	$Pa \to Qa$	(da (1) per eliminazione del quantificatore universale)
(4)	Pa	(da (2) eliminando la congiunzione)
(5)	Qa	(da (3) e (4) per modus ponens)
(6)	Ra	(da (2) eliminando la congiunzione)
(7)	$Qa \wedge Ra$	(da (5) e (6) introducendo la congiunzione)
(8)	$\exists x(Qx \wedge Ix)$	(da (7) introducendo il quantificatore esistenziale)

(b)

(1)	$\forall x(Px \to Qx)$	(premessa)
(2)	$\exists x\neg Qx$	(premessa)
(3)	$\neg Qa$	(da (2) eliminando il quantificatore esistenziale)
(4)	$Pa \to Qa$	(da (1) eliminando il quantificatore universale)
(5)	$\neg Pa$	(da (3) e (4) per modus tollens)
(6)	$\exists x\neg Px$	(da (5) introducendo il quantificatore esistenziale)

(c)

(1)	$\forall x(Px \vee Qx \to Rx)$	(premessa)
(2)	$\forall x\neg Rx$	(premessa)
(3)	$Pa \vee Qa \to Ra$	(da (1) eliminando il quantificatore universale)
(4)	$\neg Ra$	(da (2) eliminando il quantificatore universale)
(5)	$\neg(Pa \vee Qa)$	(da (3) e (4) per modus tollens)
(6)	$\neg Pa \wedge \neg Qa$	(da (5) per la legge di De Morgan)
(7)	$\neg Pa$	(da (6) eliminando la congiunzione)
(8)	$\forall x\neg Px$	(da (7) introducendo il quantificatore universale)

13. (a) "Esiste un cinese che non è asiatico" (b) "Ogni cinese non è biondo"
(c) "Esiste un europeo che è americano" (d) "Esiste un cinese che è asiatico" (e) "Esiste un cinese non asiatico"

14. (a) "Esiste un vino che non è né bianco né rosso" (b) "Esiste un napoletano non allegro o non ospitale"
(c) "Esiste un numero di cui nessuno è minore"
(oppure: "Esiste un numero di cui tutti non sono minori" o anche, tenendo presente che "non minore" equivale a "maggiore o uguale": "Esiste un numero di cui tutti sono maggiori o uguali")
(d) "Per ogni numero ne esiste un altro di cui il primo non è maggiore"
(oppure: "Per ogni numero ne esiste uno di cui il primo è minore")

15. Supponiamo che $\forall x(Px \to Qx)$ sia vera. Dobbiamo dimostrare che è vero il condizionale $\forall xPx \to \forall xQx$. Se $\forall xPx$ è falsa, allora il condizionale è vero. Se $\forall xPx$ è vera, allora, eliminando il quantificatore universale, si ha Pa. Dalla premessa segue $Pa \to Qa$, e quindi Qa, per modus ponens; da Qa, introducendo il quantificatore universale, segue $\forall xQx$ ed è quindi dimostrato il condizionale $\forall xPx \to \forall xQx$. In entrambi i casi vale $\forall xPx \to \forall xQx$.
Più intuitivamente: se è vero che ogni individuo che ha la proprietà P ha anche la proprietà Q, allora, se tutti hanno la proprietà P, tutti hanno anche la proprietà Q.
Più formalmente conviene dimostrare la contrapposta della conclusione, ossia $\neg\forall xQx \to \neg\forall xPx$. Dall'ipotesi $\neg\forall xQx$ segue $\exists x\neg Qx$ e quindi $\neg Qa$. Dalla premessa si ricava $Pa \to Qa$, e quindi si deduce $\neg Pa$ per modus tollens. Da $\neg Pa$ segue $\exists x\neg Px$ e quindi $\neg\forall xPx$.

16. La regola non è corretta in quanto la premessa può essere vera perché l'antecedente $\forall xPx$ è falso. Ad esempio la proposizione "Se tutti sono cinesi, allora tutti sono liguri" è vera, (in un dominio che non contiene tutti cinesi), ma la conclusione "Ogni cinese è ligure" è falsa.

17. Si tratta di ottenere la conclusione $\forall x\forall y(Cxy \wedge Gy \to Cxy \wedge Ay)$ assumendo la premessa $\forall x(Gx \to Ax)$. Da $Cab \wedge Gb$ e $Gb \to Ab$ (ottenuta eliminando il quantificatore universale dalla premessa) segue $Cab \wedge Ab$ (da $A \wedge B$ e $B \to C$, segue logicamente $A \wedge C$), e quindi vale il condizionale $Cab \wedge Ga \to Cab \wedge Ab$. Da quest'ultimo si ottiene la conclusione introducendo due volte il quantificatore universale.
Si noti che la formalizzazione non è univoca. Ad esempio, la proprietà di "essere coda di un gatto" si può formalizzare con $\exists y(Gy \wedge Cxy)$ e analogamente "essere coda di un animale" con $\exists y(Ay \wedge Cxy)$. Si tratta allora di dedurre $\forall x(\exists y(Gy \wedge Cxy) \to \exists y(Ay \wedge Cxy))$ dalla premessa $\forall x(Gx \to Ax)$. Sia a tale che $\exists y(Gy \wedge Cay)$. Eliminando il quantificatore esistenziale si trova $Gb \wedge Cab$ da cui si ricava facilmente dalla premessa $Ab \wedge Cab$ e quindi $\exists y(Ay \wedge Cay)$ introducendo il quantificatore esistenziale. Si è quindi ottenuto il condizionale $\exists y(Gy \wedge Cay) \to \exists y(Ay \wedge Cay)$, da cui la conclusione segue introducendo il quantificatore universale.

18. Le premesse sono: $\exists x(Rx \wedge (Mx \vee Fx \vee Cx))$ e $\neg\exists x(Rx \wedge (Mx \vee Fx))$
e la conclusione è $\exists x(Rx \wedge Cx)$
Dalla prima premessa, per eliminazione del quantificatore esistenziale, si ottiene: $Ra \wedge (Ma \vee Fa \vee Ca)$

e, dalla seconda: $\neg(Ra \wedge (Ma \vee Fa))$ (da $Ra \wedge (Ma \vee Fa)$ seguirebbe $\exists x(Rx \wedge (Mx \vee Fx))$ contro l'ipotesi).
Per la proprietà distributiva della congiunzione rispetto alla disgiunzione, da: $Ra \wedge (Ma \vee Fa \vee Ca)$ segue: $(Ra \wedge (Ma \vee Fa)) \vee (Ra \wedge Ca)$
Da $(Ra \wedge (Ma \vee Fa)) \vee (Ra \wedge Ca)$ e $\neg(Ra \wedge (Ma \vee Fa))$, per la regola del sillogismo disgiuntivo, si ottiene $Ra \wedge Ca$, e infine $\exists x(Rx \wedge Cx)$ introducendo il quantificatore esistenziale.

19. Le premesse sono $\forall x(Dx \to (Asx \leftrightarrow Apx))$, $\exists x(Dx \wedge Asx) \to Fs$ (oppure, vedi gli Esercizi 5.31 e 5.32: $\forall x(Dx \wedge Asx \to Fs)$), $\neg Fs$ e la conclusione è $\forall x(Dx \to \neg Apx)$.
Da $\exists x(Dx \wedge Asx) \to Fs$ e $\neg Fs$, per modus tollens, segue $\neg\exists x(Dx \wedge Asx)$. Sia a un individuo generico tale che Da. Da $\neg\exists x(Dx \wedge Asx)$ segue $\neg(Da \wedge Asa)$, ossia, per le leggi di De Morgan, $\neg Da \vee \neg Asa$. Da Da e $\neg Da \vee \neg Asa$, segue $\neg Asa$. Dalla prima premessa e da Da segue facilmente $Asa \leftrightarrow Apa$, e quindi da $\neg Asa$ si ottiene $\neg Apa$. Si è pertanto ottenuta la fbf $Da \to \neg Apa$ da cui segue $\forall x(Dx \to \neg Apx)$ introducendo il quantificatore universale.

20. La premessa è $\forall x(Bx \to \forall y(Rxy \leftrightarrow \neg Ryy))$ e la conclusione $\neg\exists xBx$. Per ricavare quest'ultima dalla premessa, assumiamo la fbf $\exists xBx$. Da essa segue, eliminando il quantificatore esistenziale, Ba. Dalla prima premessa si ottiene $\forall y(Ray \leftrightarrow \neg Ryy)$. Eliminando il quantificatore universale si ha $Raa \leftrightarrow \neg Raa$, che è una contraddizione. Pertanto, per introduzione della negazione, si ottiene la conclusione richiesta $\neg\exists xBx$.