

CAPITOLO PRIMO - LOGICA PROPOSIZIONALE

1. Premessa. Il compito principale della logica è quello di studiare il nesso di *conseguenza logica* tra proposizioni, predisponendo delle tecniche per determinare quando la verità di una conclusione consegue necessariamente dalla verità delle premesse. Un altro aspetto, strettamente collegato con il precedente, è quello di determinare, date certe premesse, altre proposizioni che sono loro conseguenza logica. La logica, quindi, contrariamente ad un'opinione diffusa che la identifica genericamente con l'arte del ragionamento, va intesa, almeno in prima approssimazione, come lo studio delle regole linguistiche di inferenza che sono *corrette*, ossia che conducono a conclusioni vere, qualora applicate a premesse che risultano vere, ossia, in altre parole, che *rispettano il nesso di conseguenza logica*. Un obiettivo della logica come disciplina è quindi stabilire quali ragionamenti sono corretti e quali no. Uno degli obiettivi principali è comunque quello di individuare dei "calcoli logici" che consentano di meccanizzare l'attività deduttiva e di "dominare" l'insieme delle conseguenze di un insieme di premesse, in modo da poter ragionare *sulle* teorie assiomatiche nel loro complesso: in sintesi la logica si propone di realizzare il sogno leibniziano del "calculemus".

La logica come disciplina si occupa dei ragionamenti dopo che questi sono stati espressi nel linguaggio, e non dell'attività del ragionare, dei processi interni del pensiero: la logica ha avuto un enorme sviluppo quando, da Frege in poi, si è svincolata dalla psicologia (anche se attualmente i rapporti tra la logica e la psicologia si sono rinsaldati su nuove basi). Evidentemente, in ogni caso, lo studio della logica ha benefiche ricadute sul "pensiero razionale" (come lo ha peraltro il corretto insegnamento di una qualsiasi disciplina).

L'ingresso della logica nei programmi scolastici è avvenuto in concomitanza con quello dell'informatica poiché lo studio della logica richiede l'elaborazione di linguaggi formali che sono in sintonia con i linguaggi di programmazione. Inoltre, dal punto di vista storico, gli sviluppi della logica hanno preceduto quelli dell'informatica e ne hanno costituito la cornice teorica di riferimento. Lo studio della logica, quindi, è uno strumento per inquadrare e comprendere il mondo dei calcolatori ed è indispensabile se ci si vuole rivolgere ad esso non come utenti passivi, ma con mentalità critica e voglia di capirne i risvolti concettuali e teorici.

2. Alcune caratteristiche dell'indagine logica. Un obiettivo della logica, come si è detto, è l'analisi delle inferenze. Attualmente sono state sviluppate molteplici "logiche" che si propongono di studiare aspetti sempre più ampi dell'attività inferenziale. Ai nostri fini, in sintonia con quanto espresso nei programmi della scuola secondaria, possiamo limitare il discorso a quella che viene detta la *logica classica*, nella quale si prendono in considerazione solo alcuni tipi di inferenze e si assume il *principio di bivalenza*: una proposizione può assumere soltanto uno ed uno solo dei valori di verità *vero* (**V**), o *falso* (**F**), contrariamente a quanto accade molto spesso alle proposizioni del linguaggio naturale (e molte delle "logiche" prima richiamate sono state elaborate proprio per superare tale limite della logica classica).

Quando eseguiamo un'inferenza, concateniamo delle proposizioni alcune delle quali sono assunte come premesse e altre sono dedotte da queste applicando delle regole d'inferenza. Considereremo solo inferenze *semplici* in cui l'ultima proposizione (*conclusione*) è ottenuta dalle precedenti (*premesse*) mediante l'applicazione di una sola regola (in altri termini, un'inferenza articolata in vari passaggi, quale può essere ad esempio una dimostrazione matematica, viene scomposta nei suoi costituenti più semplici).

Per analizzare logicamente un'inferenza occorre individuare la "forma logica" delle proposizioni che intervengono in essa, al fine di esaminare se la conclusione è o non è conseguenza logica delle premesse. L'individuazione della forma logica (che è un compito non facile, né univoco) viene condotta a livelli successivi di approfondimento.

Il primo livello è quello della cosiddetta *logica proposizionale*.

Detta *composta* una proposizione che contiene al suo interno almeno un'altra proposizione, si considerano solo inferenze contenenti proposizioni composte mediante connettivi *vero-funzionali*, ossia tali che il valore di verità della proposizione composta dipende *unicamente* dai valori di verità delle proposizioni più semplici che la compongono. Si considerano alcuni connettivi vero-funzionali, i più importanti dei quali, la *negazione* \neg ("non"), la *coniunzione* \wedge ("e"), la *disgiunzione non esclusiva* \vee ("o" nel senso di *vel*), il *condizionale* \rightarrow ("se...,

allora...”, o anche “solo se”) e il *bicondizionale* \leftrightarrow (“se e solo se”), sono caratterizzati dalle seguenti tavole di verità:

A	$\neg A$
V	F
F	V

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	V	F
F	F	F	F	V	V

Queste tavole stanno alla logica proposizionale come le tabelline della moltiplicazione stanno all’aritmetica.

Vediamo alcuni semplici esempi di inferenze che si possono analizzare a livello proposizionale.

1) Socrate dice: “Se io sono colpevole, allora devo essere punito; io sono colpevole. Quindi devo essere punito”.

Il ragionamento di Socrate è logicamente corretto. Passando alla forma logica (ponendo $A =$ “io sono colpevole” e $B =$ “devo essere punito”), la *regola di inferenza* (detta *modus ponens*):

$$\text{da } A \rightarrow B \text{ e } A \text{ segue } B$$

è corretta. Infatti, come si desume dalla tavola di verità del condizionale, se sono vere $A \rightarrow B$ e A (e quindi siamo nella prima riga), allora è vera B .

2) Socrate dice: “Se io sono colpevole, allora devo essere punito; ma io non sono colpevole, dunque non devo essere punito”.

Il ragionamento di Socrate *non* è logicamente corretto. Passando alla forma logica, si può constatare che:

$$\text{da } A \rightarrow B \text{ e } \neg A \text{ non segue logicamente } \neg B.$$

Infatti, dal fatto che, se A è vera, allora è vera B , non segue che, se A è falsa (ossia è vera $\neg A$), allora B è falsa (è vera $\neg B$), come si desume dalle tavole di verità e si può vedere dai seguenti controesempi in cui, anche se si suppone che le premesse siano vere, la conclusione può risultare falsa:

“Se una figura è un quadrato, allora ha quattro lati; ma non è un quadrato, quindi non ha quattro lati”

(la conclusione è falsa se la figura è, ad esempio, un trapezio)

“Se Carlo e Piero sono fratelli, allora sono parenti; ma Carlo e Piero non sono fratelli, quindi non sono parenti”

(la conclusione è falsa se Carlo e Piero sono, ad esempio, cugini)

3) Socrate dice: “Se io sono colpevole, allora devo essere punito; ma io non devo essere punito, dunque non sono colpevole”.

Il ragionamento di Socrate è logicamente corretto. La seguente regola (detta *modus tollens*):

$$\text{da } A \rightarrow B \text{ e } \neg B \text{ segue logicamente } \neg A$$

è corretta. Infatti, dal fatto che, se A è vera, allora è vera B , segue che se B è falsa (è vera $\neg B$), allora A è falsa (è vera $\neg A$), perché, se A fosse vera, allora sarebbe vera B contro l'ipotesi.

4) Socrate dice: "Se io sono colpevole, allora devo essere punito; devo essere punito. Quindi sono colpevole".

Il ragionamento di Socrate non è corretto:

da $A \rightarrow B$ e B non segue logicamente A .

Infatti, da "Se Carlo è genovese, allora Carlo è ligure" e "Carlo è ligure" non segue "Carlo è genovese": le due premesse sono entrambe vere e la conclusione falsa se, ad esempio, Carlo è nato a Savona o a La Spezia.

Abbiamo proposto questi quattro esempi per trarre alcune considerazioni sulla logica e sul suo insegnamento.

(a) **La logica ha carattere formale.** La logica si occupa delle inferenze per valutarne la correttezza. A tal fine è essenziale il passaggio dalla formulazione nel linguaggio naturale a quella in linguaggio logico poiché, per vedere se sussiste il nesso di conseguenza logica, si deve prescindere dai "contenuti" delle proposizioni A e B . Nelle regole del *modus ponens* e del *modus tollens* la verità si trasmette dalle premesse alla conclusione qualsiasi siano le proposizioni denotate da A e da B . La logica ha quindi carattere *formale* ed è basata su un processo di astrazione rispetto al linguaggio naturale. Pertanto, per ragioni di psicologia evolutiva, il suo insegnamento può essere rivolto a studenti delle scuole medie superiori, mentre nelle scuole elementari e medie le parti dedicate alla logica come disciplina possono essere solo preparatorie ad uno studio successivo, sostanzialmente rivolte all'uso consapevole del linguaggio in vista del futuro lavoro di formalizzazione (e ciò appare perfettamente in linea con quanto espresso nei programmi ministeriali).

(b) **Il linguaggio logico è artificiale.** La formalizzazione richiede che siano eliminate le possibili ambiguità del linguaggio naturale. Ad esempio, i connettivi logici prima richiamati \wedge , \vee e \rightarrow corrispondono solo ad alcuni usi di "e", "o", "se..., allora..." del linguaggio naturale. Vediamo qualche esempio relativo alla congiunzione "e".

Dalla proposizione "2 è pari e 4 è pari" segue logicamente "4 è pari e 2 è pari".

Dalla proposizione "Sono andato alla stazione e ho preso il treno" non segue logicamente "Ho preso il treno e sono andato alla stazione" (evidentemente, dalla verità della prima non segue quella della seconda).

La proposizione "La maglia del Milan è rossa e nera" non equivale alla proposizione "La maglia del Milan è rossa e la maglia del Milan è nera" (infatti, la prima è vera e la seconda è falsa).

Pertanto, nel linguaggio naturale molti usi di "e" non sono vero-funzionali e spesso la "e" non è tra due proposizioni ma tra due nomi, o due verbi, o due attributi (come nell'ultimo esempio) e a volte equivale a una congiunzione logica (come in "Carlo e Davide sono italiani" che equivale a "Carlo è italiano e Davide è italiano"), a volte no (come in "Carlo e Davide sono amici" che ovviamente non equivale a "Carlo è amico e Davide è amico"). Viceversa, spesso la congiunzione logica è espressa senza usare la "e". Ad esempio "Carlo è genovese. Davide è milanese", "Carlo è genovese, ma Davide è milanese", "Carlo è genovese, mentre Davide è milanese", "Sebbene Carlo sia genovese, Davide è milanese" sono tutte formalizzabili con la congiunzione logica di "Carlo è genovese" e "Davide è milanese" (le differenze linguistiche tra di esse non sono rilevanti dal punto di vista inferenziale).

Nel caso della disgiunzione, già nel linguaggio naturale esistono tre usi vero-funzionali. Oltre a "o" nel senso di *vel* (disgiunzione alternativa), esiste "o" nel senso di *aut* (disgiunzione esclusiva) quando si esprime il fatto che vale una e una sola di due proposizioni e "o" incompatibile quando si vuole sottolineare che due proposizioni non possono essere entrambe vere. Se indichiamo con \vee l'*aut* e con una barra verticale | l'"o" incompatibile (che viene anche detto *Nand* in informatica) si hanno le due seguenti tavole di verità per questi due nuovi connettivi vero funzionali:

A	B	$A \underline{\vee} B$	$A B$
V	V	F	F
V	F	V	V
F	V	V	V
F	F	F	V

In logica è usuale non introdurre molti connettivi in quanto alcuni si possono definire: in questi due casi è evidente che $A \underline{\vee} B$ equivale a $\neg(A \leftrightarrow B)$ e $A | B$ equivale a $\neg(A \wedge B)$. Si può dimostrare che mediante \neg , \wedge e \vee si possono definire *tutti* gli altri connettivi vero-funzionali e tale risultato vale anche se si considerano solo i connettivi \neg e \wedge , oppure \neg e \vee , oppure \neg e \rightarrow .

Questo tipo di considerazioni, che può essere esteso agli altri connettivi (sul condizionale torneremo più avanti), indica che è possibile proporre un'analisi logica delle proposizioni del linguaggio naturale che ha la funzione di far emergere come la verità delle proposizioni composte sia (o non sia) funzione della verità delle proposizioni componenti. Analisi di questo tipo sono importanti per abituare all'uso corretto e consapevole del linguaggio e possono essere eseguite anche a livello di scuola elementare e media inferiore, ad esempio parallelamente all'apprendimento della lingua italiana.

(c) **Le regole logiche non sono innate.** L'analisi logica delle quattro precedenti inferenze ha mostrato che due sono corrette e due no. Di fronte a test in cui si sono proposte inferenze dei quattro tipi, soggetti non educati logicamente (nel senso che non hanno studiato la logica come disciplina) hanno manifestato comportamenti spesso erronei, persino di fronte ad esempi del *modus ponens*, e, in misura molto maggiore, di fronte ad esempi del *modus tollens*, e la percentuale di errore è aumentata notevolmente se il contesto delle proposizioni era astratto. In un esperimento realmente effettuato, dovendo ottenere una conclusione da "Se c'è un quadrato allora c'è un triangolo. C'è un quadrato" ha sbagliato circa il 10%, che è salito al 30% nel caso di "Se c'è un cerchio, allora c'è una stella. Non c'è una stella". La situazione appare più sconcertante nel caso dei due esempi di regole scorrette:

da $A \rightarrow B$ e $\neg A$ segue $\neg B$ (fallacia della negazione dell'antecedente)

da $A \rightarrow B$ e B segue A (fallacia dell'affermazione del conseguente)

nelle quali dalla verità delle due premesse non si può risalire al valore di verità del conseguente. Di fronte a "Se Lisa va in vacanza, allora io resterò in città questo mese. Lisa non va in vacanza" ha tratto la conclusione erronea ("io non resterò in città questo mese" o sue varianti linguistiche) circa l'87% dei partecipanti, che è salita al 96% nel caso di "Se Maria va in vacanza, allora io resterò in città questo mese. Io resterò in città questo mese" (la conclusione è stata "Maria va in vacanza" o sue varianti linguistiche).

Ciò che ci sembra si possa concludere, a prescindere da ulteriori approfondimenti, è che la capacità di analizzare le regole di inferenza della logica classica non matura spontaneamente negli esseri umani, ma deve essere oggetto di un apprendimento mirato (magari solo con l'obiettivo limitato di preparare gli alunni a cimentarsi in test di tipo logico oggi assai di moda, ad esempio per l'ammissione ai corsi universitari a numero chiuso). Una delle ragioni principali della scarsa predisposizione all'applicazione corretta delle regole logiche nelle inferenze quotidiane sta nel tipo di semplificazioni (e precisazioni) che sono alla base della logica classica. Senza aprire una parentesi troppo ampia, si può sostenere che la logica classica (che è poi quella menzionata nei programmi delle scuole) è quella che interviene nelle dimostrazioni matematiche, e quindi è modellata relativamente ad un mondo sicuramente diverso da quello della vita quotidiana, in cui l'attività inferenziale è fortemente influenzata dai "contenuti" e da conoscenze implicite: in poche parole il ragionamento logico-formale (al pari quello probabilistico) non è affatto spontaneo, ma va coltivato in maniera esplicita, e questo è un elemento a favore dell'inserimento della logica nei programmi.

(d) **Molti “ragionamenti” non sono logici.** La gran parte dei ragionamenti svolti nella vita quotidiana non sono logici, nel senso che nelle inferenze non è rispettato il nesso di conseguenza logica che caratterizza le regole della logica classica. Vediamo alcuni esempi di ragionamenti non logicamente corretti.

Ragionamento induttivo:

“Tutti i corvi finora osservati sono neri”

Quindi: “Tutti i corvi sono neri”

Non è nemmeno il caso di sottolineare quanto fondamentali siano i ragionamenti induttivi nella formulazione delle leggi della natura e nella scelta delle nostre azioni quotidiane. Tuttavia non sono “logicamente corretti” nel senso prima precisato: la verità della premessa non garantisce affatto quella della conclusione.

Ragionamento abduttivo

“L’assassino ha lasciato tracce di fango sul tappeto”

“Chi fosse entrato dal giardino, avrebbe lasciato tracce di fango sul tappeto”

Quindi: “L’assassino è entrato dal giardino”

Si noti che questo ragionamento ricalca la precedente fallacia dell’affermazione del conseguente, ossia si qualifica come ragionamento ciò che in precedenza abbiamo dichiarato un “errore” logico. Ragionamenti abduttivi sono assai frequenti nella vita quotidiana quando si va alla ricerca delle cause di un fenomeno e hanno trovato molte applicazioni nei sistemi esperti, ad esempio per le diagnosi mediche.

Ragionamento per default

“I polacchi non parlano italiano”

“Karol è polacco”

Quindi: “Karol non parla italiano”

Se si viene a sapere che “Karol è il papa Wojtyła” oppure “Karol è iscritto alla facoltà di Lettere dell’Università di Genova”, dato che “I papi parlano italiano” e “Per iscriversi alla facoltà di Lettere dell’Università di Genova, bisogna saper parlare l’italiano”, la conclusione diverrebbe opposta alla precedente: “Karol parla italiano”. Le inferenze corrette della logica classica godono della proprietà detta di *monotonia*, che segue immediatamente dalla definizione di conseguenza logica: una conclusione tratta logicamente da determinate premesse rimane tale anche aumentando il numero delle premesse (e questa proprietà è quella che assicura, ad esempio, la stabilità dei teoremi matematici: le proposizioni di Euclide sono sempre teoremi della geometria euclidea nonostante siano passati più di duemila anni e le conoscenze matematiche enormemente cresciute). Molti ragionamenti quotidiani, invece, non hanno questa caratteristica (non sono monotoni): le conclusioni cambiano quando si assume nuova informazione. Ciò è dovuto al fatto che spesso si basano su generalizzazioni che ammettono eccezioni. Non è vero che “I polacchi non parlano italiano”, ma piuttosto che “Normalmente i polacchi non parlano italiano”, per cui, in assenza di altre informazioni, deduciamo che il polacco Karol non parla italiano; siamo tuttavia disposti a ritrattare la nostra conclusione quando veniamo in possesso di ulteriori informazioni relative a Karol.

Esistono settori della logica in cui si analizzano inferenze di questo genere (logica induttiva, logica abduttiva, logiche non monotone,...). In generale però lo studio di queste logiche (e di molte altre) può essere affrontato solo dopo che si siano acquisite sufficienti conoscenze di logica classica per cui, a livello di scuole elementari, medie e superiori, i programmi fanno giustamente riferimento a temi di logica classica.

3. Ulteriori considerazioni sul condizionale. I fenomeni sui quali ci siamo soffermati in precedenza (differenze tra il ragionamento “logico” e il ragionamento in generale, difficoltà a interpretare test di natura logica) sono in larga misura causati dalla definizione della tavola di verità del condizionale che, pur leggendosi “se..., allora...”, in genere non corrisponde all’uso di “se..., allora...” del linguaggio comune, che interviene più o meno esplicitamente in tutte le forme di ragionamento. È quindi legittimo chiedersi da dove abbia origine la tavola di verità del condizionale $A \rightarrow B$ (A è l’*antecedente* e B il *conseguente* del condizionale) con la quale abbiamo giustificato la legittimità del *modus ponens* e del *modus tollens* e la non correttezza

delle fallacie della negazione dell'antecedente e dell'affermazione del conseguente. Da un lato si può rispondere che tale tavola è giustificabile proprio perché vogliamo assumere come corrette le prime due regole (intuitivamente evidenti) e scorrette le altre due (che presentano controesempi). Meno circolarmente (anche se in logica una circolarità almeno iniziale è inevitabile poiché ci si propone di ragionare in modo logicamente corretto sulle regole logicamente corrette del ragionamento), si può rispondere che la tavola di verità del condizionale corrisponde all'uso del "se..., allora..." in matematica in cui, come è noto, gli enunciati dei teoremi hanno quasi sempre la forma "se (ipotesi), allora (tesi)": quando si enuncia un teorema si intende affermare che non si può dare il caso che l'ipotesi sia vera e la tesi falsa. Ebbene, la tavola di verità del condizionale $A \rightarrow B$ coincide con quella di $\neg(A \wedge \neg B)$ calcolata servendosi delle tavole della congiunzione e della negazione.

Inoltre, come è noto, fin dall'antichità è stato ritenuto legittimo dimostrare un teorema mediante un ragionamento per assurdo. Senza entrare in dettagli, ragionare per assurdo significa assumere che l'ipotesi sia vera e la tesi falsa (ossia supporre di essere nel caso della seconda riga della tavola di verità del condizionale) e dedurre che ciò non si può realizzare perché porta a contraddizione. Ciò consente di escludere che si realizzi la seconda riga della tavola del condizionale, e se ne può dedurre che il condizionale (il teorema) è vero poiché in tutti gli altri tre casi il valore di verità è V.

Ancora, tutti siamo disposti a ritenere vera la proposizione "Tutti gli uomini sono mortali" ed è altrettanto evidente che, se è vera una proposizione universale, (ossia che riguarda "tutti") devono essere veri tutti i suoi casi particolari (che ne conseguono logicamente). Pertanto sono vere: "Se Socrate è uomo, allora Socrate è mortale" (con antecedente e conseguente veri), "Se il cane Fido è un uomo, allora il cane Fido è mortale" (con antecedente falso e conseguente vero), e "Se il Monte Rosa è un uomo, allora il Monte Rosa è mortale" (con antecedente e conseguente falsi).

Se quindi la tavola del condizionale appare pienamente giustificata, ciò non toglie che essa comporti conseguenze poco intuitive se si esce dall'ambito matematico. Non è un caso che in un test quasi tutti hanno dichiarato falsi i seguenti tre condizionali con antecedente falso e conseguente vero:

"Se il Sole ruota attorno alla Terra, allora il Sole è una stella"

"Se la Svizzera è un'isola, allora il giglio è un fiore"

"Se la Terra è disabitata, allora la Luna è un satellite"

molti hanno dichiarato falso il seguente condizionale con antecedente e conseguente falsi:

"Se il Sole ruota attorno alla Terra, allora Marte non appartiene al nostro sistema solare"

e più di metà hanno dichiarato falso il seguente condizionale con antecedente e conseguente veri:

"Se la Luna ruota attorno alla Terra, allora il Sole è una stella"

Ovviamente, questo non vuol dire affatto che la gente "non ragiona logicamente", ma che il "se..., allora..." dei logici non coincide con il "se..., allora..." del linguaggio comune. Ad esempio, nelle quattro inferenze precedenti, la premessa "Se io sono colpevole, allora devo essere punito" potrebbe essere pronunciata da un parlante con l'intenzione di esprimere non un condizionale, ma un bicondizionale (tutti e soli i colpevoli devono essere puniti): se si sostituisce $A \rightarrow B$ con $A \leftrightarrow B$ tutte e quattro le regole, come si verifica facilmente, divengono corrette.

Le due seguenti regole che coinvolgono il condizionale:

(1) da A segue $B \rightarrow A$

(2) da A segue $\neg A \rightarrow B$

sono logicamente corrette (se A ha valore di verità V, sia $B \rightarrow A$ che $\neg A \rightarrow B$ hanno valore V), e sono detti *paradossi dell'implicazione materiale*. La prima ha come conseguenza che dalla verità di " $2+2 = 4$ ", segue quella di "Se la luna è di formaggio, allora $2+2 = 4$ " e di "Se la luna non è di formaggio, allora $2+2 = 4$ "; la seconda che dalla verità di " $2 + 2 = 4$ ", segue quella di "Se $2 + 2 \neq 4$, allora i maiali volano" e di "Se $2 + 2 \neq 4$, allora i maiali non volano".

Inoltre sono tutte vere le quattro proposizioni:

"Se 7 è un numero pari, allora $2 + 2 = 4$ " "Se 7 non è un numero pari, allora $2 + 2 = 4$ "

"Se $2 + 2 \neq 4$, allora 7 è un numero pari" "Se $2 + 2 \neq 4$, allora 7 non è un numero pari"

Come si vede, negli esempi di quest'ultimo paragrafo abbiamo spesso formulato proposizioni che figurano solo nei testi di logica, ma che nessuno si sarebbe mai sognato di pronunciare. Questo convalida quanto abbiamo finora sostenuto: l'analisi logica delle inferenze richiede una formalizzazione, e il relativo svuotamento dei contenuti ha la conseguenza che la sensatezza di quanto si ottiene non si mantiene se si esce dai confini dell'ambito di applicazioni della logica classica, ad esempio quando la si vuole applicare all'analisi di ragionamenti di senso comune nei quali i nessi fra i contenuti non sono affatto irrilevanti e le proposizioni non hanno un significato univoco.

4. Logica proposizionale

Richiamiamo ora sinteticamente alcune nozioni precedentemente esposte.

Definizione 1. Si dice **proposizione** ogni espressione linguistica per la quale ha senso chiedersi se è vera o falsa (a prescindere dal fatto che si sappia quale delle due circostanze si verifica).

Definizione 2. Una proposizione si dice **semplice** (o **atomica**) se non contiene al suo interno una parte che è a sua volta una proposizione; in caso contrario è detta **composta**.

Definizione 3. Si dice **connettivo** una espressione del linguaggio con cui si ottiene una proposizione composta a partire da una o più proposizioni date

Definizione 4. Si dice **vero-funzionale** un connettivo tale che il valore di verità della proposizione composta ottenuta mediante esso dipende unicamente dai valori di verità delle proposizioni a cui si applica.

Definizione 5. Si dice **forma proposizionale (fp)** una formula ottenuta dalle lettere A, B, C, \dots applicando un numero finito di volte i connettivi logici (e si adotta la convenzione che \neg lega più strettamente di \wedge e \vee i quali, a loro volta, legano più strettamente di \rightarrow e \leftrightarrow).

Mediante fp si formalizzano le proposizioni composte che intervengono nelle inferenze studiate nella logica proposizionale. Mediante le tavole di verità dei connettivi si possono calcolare le tavole di verità delle forme proposizionali.

Esempio 1. Scrivere la tavola di verità della fp $(A \wedge \neg B) \vee \neg(A \leftrightarrow B)$.

A	B	$(A \wedge \neg B)$	\vee	$\neg(A \leftrightarrow B)$
V	V	F	F	F
V	F	V	V	F
F	V	F	V	F
F	F	F	F	V

Esempio 2. Scrivere la tavola di verità della fp $(A \rightarrow \neg C) \wedge (B \rightarrow \neg C)$.

A	B	C	$(A \rightarrow \neg C)$	\wedge	$(B \rightarrow \neg C)$
V	V	V	F	F	F
V	V	F	V	V	V
V	F	V	F	F	F
V	F	F	V	V	V
F	V	V	F	F	F
F	V	F	V	V	V
F	F	V	F	F	F
F	F	F	V	V	V

Esempio 3. Scrivere la tavola di verità della fp $\neg(A \rightarrow (\neg A \rightarrow B \vee C))$.

A	B	C	\neg	(A	\rightarrow	(\neg	A	\rightarrow	B	\vee	C)
V	V	V	F	V	V	F	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	V	F	V	V	V	V	F
V	F	V	F	V	V	F	V	V	F	V	V
V	F	F	F	V	V	F	V	V	F	F	F
F	V	V	F	F	V	V	F	V	V	V	V
F	V	F	F	F	V	V	F	V	V	V	F
F	F	V	F	F	V	V	F	V	F	V	V
F	F	F	F	F	V	V	F	F	F	F	F
			(5)	(1)	(4)	(2)	(1)	(3)	(1)	(2)	(1)

I numeri in parentesi sotto le colonne indicano l'ordine con cui viene compilata la tavola: si parte dalle (colonne delle) lettere e si applicano le tavole dei verità dei connettivi nell'ordine stabilito dalle parentesi (e dalle priorità prima convenzionalmente stabilite).

5. Concetti semantici fondamentali

Definizione 1. Si dice che la forma proposizionale X è una **tautologia** se e solo se assume sempre valore **V**.

(Si vedano gli esercizi dal 12 al 18)

Definizione 2. Si dice che la forma proposizionale X è **logicamente equivalente** alla forma proposizionale Y se e solo se X e Y hanno lo stesso valore di verità in corrispondenza di ogni assegnazione di valori di verità alle lettere che compaiono in esse.

Teorema 1. Due forme proposizionali X e Y sono logicamente equivalenti se e solo se la forma proposizionale $X \leftrightarrow Y$ è una tautologia.

(Si vedano gli esercizi dal 19 al 21).

Definizione 3. Si dice che la forma proposizionale X è **conseguenza logica** della forma proposizionale Y se e solo se, per ogni assegnazione di valori di verità alle lettere proposizionali che compaiono in esse, se Y ha valore **V**, allora X ha valore **V** (più semplicemente: se e solo se ogni volta che Y è vera, allora è vera anche X).

Teorema 2. La forma proposizionale X è conseguenza logica della forma proposizionale Y se e solo se $Y \rightarrow X$ è una tautologia.

(Si vedano gli esercizi 22 e 23)

Definizione 4. Si dice che la forma proposizionale X è **conseguenza logica** delle forme proposizionali Y_1, Y_2, \dots, Y_n se e solo se X è vera per tutte le assegnazioni di valori di verità alle lettere proposizionali che rendono vere Y_1, Y_2, \dots, Y_n (più semplicemente: se e solo se X è vera ogni volta che sono vere Y_1, Y_2, \dots, Y_n).

Teorema 3. La forma proposizionale X è conseguenza logica delle forme proposizionali Y_1, Y_2, \dots, Y_n se e solo se la forma proposizionale $Y_1 \wedge Y_2 \wedge \dots \wedge Y_n \rightarrow X$ è una tautologia.

(Si vedano gli esercizi dal 24 al 26)

Una **regola logica** è una scrittura del tipo:

$$\frac{Y_1 \quad Y_2 \quad \dots \quad Y_n}{X}$$

dove le forme proposizionali Y_1, Y_2, \dots, Y_n sono le **premesse** e la forma proposizionale X è la **conclusione** della regola.

Definizione 5. Una regola logica è **corretta** se e soltanto se la conclusione X è conseguenza logica delle premesse Y_1, Y_2, \dots, Y_n .

Dal Teorema 3 segue facilmente che una regola logica è corretta se e solo se la forma proposizionale $Y_1 \wedge Y_2 \wedge \dots \wedge Y_n \rightarrow X$ è una tautologia.

(Si vedano gli esercizi dal 27 al 31).

Con gli strumenti esposti si può studiare la correttezza delle inferenze di livello proposizionale. Vediamo due esempi non banali (e gli esercizi dal 32 al 36).

Esempio 1. Verificare se la seguente inferenza è corretta:

“Se il Milan ha vinto la partita, allora il Brescia e il Piacenza retrocedono. Se almeno uno tra il Brescia e il Piacenza retrocede, allora il Torino si salva. Quindi, se il Torino non si salva, allora il Milan non ha vinto la partita”.

Ponendo: $A = \text{“Il Milan ha vinto la partita”}$ $B = \text{“Il Brescia retrocede”}$
 $C = \text{“Il Piacenza retrocede”}$ $D = \text{“Il Torino si salva”}$

l’inferenza si può formalizzare nel modo seguente:

$$\frac{\begin{array}{l} A \rightarrow B \wedge C \\ B \vee C \rightarrow D \end{array}}{\neg D \rightarrow \neg A}$$

Per vedere se la forma proposizionale $\neg D \rightarrow \neg A$ è conseguenza logica delle due fp $A \rightarrow B \wedge C$ e $B \vee C \rightarrow D$, procediamo supponendo $A \rightarrow B \wedge C$ e $B \vee C \rightarrow D$ vere e $\neg D \rightarrow \neg A$ falsa.

Se $\neg D \rightarrow \neg A$ ha valore **F**, allora $\neg D$ ha valore **V** e $\neg A$ ha valore **F**. Quindi D è falsa e A è vera. Se A è vera, avendo supposto vera la prima premessa, sempre per la tavola di verità del condizionale, deve essere vera $B \wedge C$, ossia devono essere vere sia B , sia C . Se B e C hanno valore **V**, anche $B \vee C$ ha valore **V**. Nella seconda premessa è vero l’antecedente e quindi deve essere vero il conseguente D . Si perviene ad affermare che D è sia falsa che vera. Dato che siamo pervenuti a una contraddizione, non possono essere vere le premesse e falsa la conclusione, per cui il ragionamento è corretto.

Esempio 2. Verificare se è corretta la seguente inferenza:

“Se il Milan ha vinto la partita, allora almeno uno tra il Brescia e il Piacenza retrocede. Se il Brescia e il Piacenza retrocedono, allora il Torino si salva. Quindi, se il Torino non si salva, allora il Milan non ha vinto la partita”.

Ponendo come nell’esempio 1, l’inferenza si può formalizzare nel modo seguente:

$$\frac{\begin{array}{l} A \rightarrow B \vee C \\ B \wedge C \rightarrow D \end{array}}{\neg D \rightarrow \neg A}$$

Per vedere se la forma proposizionale $\neg D \rightarrow \neg A$ è conseguenza logica delle fp $A \rightarrow B \vee C$ e $B \wedge C \rightarrow D$ procediamo come nell’esempio precedente supponendo $A \rightarrow B \vee C$ e $B \wedge C \rightarrow D$ vere e $\neg D \rightarrow \neg A$ falsa.

Se $\neg D \rightarrow \neg A$ ha valore **F**, allora $\neg D$ ha valore **V** e $\neg A$ ha valore **F**, ossia D ha valore **F** e A ha valore **V**. Essendo vera la prima premessa e vero il suo antecedente A , ne segue che è vera la disgiunzione $B \vee C$, e quindi che almeno una fra B e C è vera. Se supponiamo, ad esempio, vera B e falsa C , la congiunzione $B \wedge C$ ha valore **F**, e anche la seconda premessa, essendo un condizionale con antecedente falso, è vera. Non siamo pervenuti ad alcuna contraddizione, quindi l’inferenza non è corretta. Più precisamente, se i valori di verità di A, B, C e D sono rispettivamente **V, V, F** e **F**, le premesse sono vere e la conclusione falsa. Ciò significa che la conclusione *non* è conseguenza logica delle premesse e, pertanto, la regola non è corretta.

ESERCIZI RELATIVI AL CAPITOLO PRIMO (LOGICA PROPOSIZIONALE)

- Indicare quali dei seguenti enunciati sono proposizioni:
 - “Milano è la capitale d’Italia”
 - “Milano è la capitale d’Italia?”
 - “Nelle scuole è vietato fumare”
 - “Non fumare a scuola!”
 - “Si può fumare a scuola?”
 - “C’è vita fuori dal sistema solare”
 - “L’uomo è in grado di volare”
 - “Fosse l’uomo in grado di volare!”
 - “Dio esiste”
 - “Probabilmente Dio esiste”
 - “Devi credere in Dio!”
- Dire in quali delle seguenti proposizioni la congiunzione “e” si può formalizzare con la congiunzione logica \wedge :
 - “Carlo e Marco sono insegnanti”
 - “Carlo e Marco sono compaesani”
 - “Carlo e Marco stanno venendo alla festa”
 - “Carlo e Marco stanno venendo insieme alla festa”
 - “Carlo ha una maglia bianca e blu”
 - “Carlo ha superato l’esame ed è andato in ferie”
 - “Carlo è andato al bar e ha preso un caffè”
 - “Carlo e Marco pesano ciascuno 80 Kg”
 - “Carlo e Marco pesano insieme 160 Kg”
- Dire se nelle seguenti proposizioni la “o” è inclusiva o esclusiva:
 - “Nelle fermate a richiesta l’autobus si ferma se qualche persona deve scendere o salire”
 - “Nel menu turistico è compreso il dolce o la frutta”
 - “Paolo sposerà Marina o Monica”
 - “Per vincere quel concorso bisogna essere molto bravi o raccomandati”
 - “L’unanimità si raggiunge quando tutti sono favorevoli o tutti sono contrari”
 - “Puoi farmi avere notizie tramite Claudia o tramite Elisa”
- Dire a cosa equivalgono i termini sottolineati nelle seguenti proposizioni:
 - “Giovanna è bella, ma Claudia è intelligente”
 - “Marcello è in campo, benché abbia la febbre”
 - “John è in Italia senza avere il passaporto”
 - “Giorgio è italiano dato che è nato a Imperia”
 - “David è spagnolo perché è nato a Barcellona”
 - “Oggi è bello e quindi vado in barca”
 - “Carlo gioca a meno che piova”
 - “A meno che Carlo intervenga, lo scontro è inevitabile”
 - “Dario va al bar precisamente quando alla televisione trasmettono una partita del Milan”
 - “Il fantasma appare nel castello esattamente ogni volta che scocca la mezzanotte”.
- “Sono ammesse al concorso le persone che sono laureate e che hanno meno di trent’anni o hanno figli”. Aldo non è laureato, ha ventisei anni e un figlio. Paolo è laureato, ha quarant’anni e due figli. Vincenzo è laureato ha trentadue anni e non ha figli. Chi può partecipare al concorso? La “o” è inclusiva o esclusiva?
- Si verifichi che $A \rightarrow B$, oltre che a $\neg(A \wedge \neg B)$, equivale a $\neg A \vee B$.
- Data una proposizione condizionale $A \rightarrow B$, detta proposizione *diretta*, se si scambiano tra loro antecedente e conseguente si ottiene la proposizione *inversa* $B \rightarrow A$; se si negano antecedente e conseguente si ottiene la proposizione *contraria* $\neg A \rightarrow \neg B$; infine, invertendo la contraria, si ottiene la proposizione *contronominale* $\neg B \rightarrow \neg A$. Verificare che:
 - se è vera la proposizione diretta è vera la contronominale e, viceversa, se è vera la contronominale è vera la diretta.
 - se è vera la proposizione inversa è vera la contraria e, viceversa, se è vera la contraria è vera l’inversa.
 - se è vera la diretta non è detto che sia vera l’inversa.
- Angelo, Bruno e Carlo sono tre studenti che hanno sostenuto un esame. Ponendo:
 $A =$ “Aldo ha superato l’esame”, $B =$ “Bruno ha superato l’esame”
 $C =$ “Carlo ha superato l’esame”
determinare le proposizioni composte che traducono le seguenti proposizioni:

- (a) “Solo Carlo ha superato l’esame”
- (b) “Solo Aldo non ha superato l’esame”
- (c) “Solo uno tra Aldo, Bruno e Carlo ha superato l’esame”
- (d) “Almeno uno tra Aldo, Bruno e Carlo ha superato l’esame”
- (e) “Almeno due tra Aldo, Bruno e Carlo hanno superato l’esame”
- (f) “Al più due tra Aldo, Bruno e Carlo hanno superato l’esame”
- (g) “Esattamente due tra Aldo, Bruno e Carlo hanno superato l’esame”

9. Angelo, Bruno e Carlo sono gli unici tre membri di una commissione che vota una proposta. Ponendo:

A = “Angelo vota a favore” B = “Bruno vota a favore” C = “Carlo vota a favore”

determinare le proposizioni composte che traducono le seguenti proposizioni:

- (a) “La votazione è stata unanime”
- (b) “La proposta è passata a maggioranza”
- (c) “La proposta ha ricevuto un numero dispari di voti”
- (d) “La proposta è stata respinta, ma non all’unanimità”
- (e) “La proposta è stata respinta con il voto contrario di Bruno”

10. Posto: A = “Carlo è ligure” e B = “Diego è piemontese”, scrivere le fp che formalizzano le seguenti proposizioni:

- (a) “Carlo non è ligure”
- (b) “Carlo è ligure e Diego è piemontese”
- (c) “Carlo è ligure sebbene Diego sia piemontese”
- (d) “Non è vero che Carlo sia ligure e Diego piemontese”
- (e) “Se Carlo non è ligure, allora Diego non è piemontese”
- (f) “È falso che se Carlo è ligure, allora Diego è piemontese”
- (g) “Carlo è ligure solo se Diego non è piemontese”
- (h) “Carlo è ligure se e solo se Diego non è piemontese”
- (i) “O Carlo è ligure o, se Carlo non è ligure, allora Diego è piemontese”
- (l) “O Carlo è ligure e Diego è piemontese, o né Carlo è ligure, né Diego è piemontese”

11. Posto A = “Angelo viene alla festa” B = “Bruno viene alla festa”
 C = “Carlo viene alla festa” D = “Davide viene alla festa”

scrivere le fp che formalizzano le seguenti proposizioni:

- (a) “Angelo viene alla festa, ma Bruno no”
- (b) “Se Davide viene alla festa allora vengono anche Bruno e Carlo”
- (c) “Carlo viene alla festa se non vengono Angelo e Bruno”
- (d) “Davide viene alla festa se e solo se viene Carlo e non viene Angelo”
- (e) “O Carlo viene alla festa, o Bruno e Davide non vengono”
- (f) “Se Davide viene alla festa, allora, se Carlo non viene, viene Angelo”
- (g) “Carlo viene alla festa purché venga Davide, ma, se viene Davide, allora Bruno non viene”
- (h) “Se vengono alla festa Angelo e Bruno, allora viene Carlo se non viene Davide”
- (i) “Carlo viene alla festa se non vengono Bruno e Angelo o se viene Davide”
- (l) “Se Angelo viene alla festa allora vengono Bruno o Carlo, ma se Angelo non viene alla festa, allora vengono Carlo e Davide”
- (m) “Affinché Angelo venga alla festa, bisogna che se non vengono Bruno e Carlo, allora venga Davide”
- (n) “Angelo, Bruno e Carlo vengono alla festa se e solo se Davide non viene, ma, se né Angelo né Bruno vengono, Davide viene se viene Carlo”

12. Calcolare la tavola di verità delle seguenti forme proposizionali e stabilire quali sono tautologie:

- (a) $A \vee B \rightarrow A$
 $(\neg A \wedge \neg B)$
- (b) $A \vee B \leftrightarrow A \wedge B$
- (c) $(A \wedge B) \vee$
- (d) $((A \rightarrow B) \rightarrow B) \rightarrow B$
- (e) $((A \rightarrow B) \rightarrow B) \vee \neg B$
- (f) $((A \rightarrow B) \rightarrow B) \rightarrow \neg B$
- (g) $(A \vee B \leftrightarrow A \wedge B) \leftrightarrow (A \leftrightarrow B)$

(h) $((A \rightarrow B) \rightarrow B) \rightarrow \neg B \leftrightarrow \neg B$ (i) $\neg(A \vee B) \rightarrow (\neg B \vee \neg A)$

13. Calcolare la tavola di verità delle seguenti forme proposizionali e stabilire quali sono tautologie:

- (a) $A \wedge (B \vee C) \rightarrow A \vee (B \wedge C)$ (b) $A \vee (B \wedge C) \rightarrow A \wedge (B \vee C)$
(c) $A \wedge (B \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow A \wedge C)$ (d) $(B \rightarrow A \wedge C) \rightarrow A \wedge (B \rightarrow C)$
(e) $(A \rightarrow B \vee C) \leftrightarrow (B \rightarrow A \vee C)$ (f) $\neg(A \wedge B \rightarrow C) \rightarrow B \vee \neg(A \wedge B)$
(g) $\neg(B \wedge (C \rightarrow A \wedge C))$ (h) $(B \wedge C) \vee ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$
(i) $\neg(A \vee (B \vee C) \rightarrow A \wedge (B \wedge C))$

14. Verificare che le seguenti forme proposizionali sono tautologie:

- (a) principio del terzo escluso: $A \vee \neg A$ (b) principio di non contraddizione: $\neg(A \wedge \neg A)$
(c) idempotenza della congiunzione: $A \wedge A \leftrightarrow A$ (d) idempotenza della disgiunzione: $A \vee A \leftrightarrow A$
(e) principio di identità: $A \rightarrow A$ (f) legge della doppia negazione: $A \leftrightarrow \neg \neg A$

15. Verificare che le seguenti forme proposizionali sono tautologie:

- (a) $A \wedge B \leftrightarrow B \wedge A$ (*proprietà commutativa della congiunzione*)
(b) $A \vee B \leftrightarrow B \vee A$ (*proprietà commutativa della disgiunzione*)
(c) $A \wedge B \rightarrow A$ $A \wedge B \rightarrow B$ (*eliminazione della congiunzione*)
(d) $A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B))$ (*introduzione della congiunzione*)
(e) $A \rightarrow A \vee B$ $A \rightarrow B \vee A$ (*introduzione della disgiunzione*)
(f) $A \wedge (A \vee B) \leftrightarrow A$ (*I legge di assorbimento*)
(g) $A \vee (A \wedge B) \leftrightarrow A$ (*II legge di assorbimento*)
(h) $A \wedge \neg A \rightarrow B$ (*I legge di Scoto*)
(i) $A \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$ (*II legge di Scoto*)

16. Verificare che le seguenti forme proposizionali sono tautologie:

- (a) $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$ (*I legge di contrapposizione*)
(b) $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$ (*II legge di contrapposizione*)
(c) $(A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow \neg A)$ (*III legge di contrapposizione*)
(d) $(\neg A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow A)$ (*IV legge di contrapposizione*)
(e) $((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$ (*legge di Peirce*)
(f) $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (B \leftrightarrow A)$ (*proprietà commutativa del bicondizionale*)
(g) $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (\neg A \leftrightarrow \neg B)$
(h) $(\neg A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (A \leftrightarrow \neg B)$
(i) $(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$
(l) $A \wedge B \leftrightarrow \neg(\neg A \vee \neg B)$ (*I legge di De Morgan*)
(m) $A \vee B \leftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$ (*II legge di De Morgan*)
(n) $(A \rightarrow B) \leftrightarrow \neg A \vee B$ (*legge di Filone Megarico*)
(o) $(A \rightarrow B) \leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)$ (*legge di Crisippo*)
(p) $A \wedge B \leftrightarrow \neg(A \rightarrow \neg B)$
(q) $A \vee B \leftrightarrow (\neg A \rightarrow B)$

17. Verificare che le seguenti forme proposizionali sono tautologie:

- (a) $A \wedge (B \wedge C) \leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$ (*proprietà associativa della congiunzione*)
(b) $A \vee (B \vee C) \leftrightarrow (A \vee B) \vee C$ (*proprietà associativa della disgiunzione*)
(c) $A \wedge (B \vee C) \leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ (*proprietà distributiva della congiunzione rispetto alla disgiunzione*)
(d) $A \vee (B \wedge C) \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ (*proprietà distributiva della disgiunzione rispetto alla congiunzione*)

- (e) $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$ (prima legge di concatenazione)
 (f) $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$ (seconda legge di concatenazione)
 (g) $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \leftrightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$ (legge di Frege)
 (h) $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \leftrightarrow (A \wedge B \rightarrow C)$
 (i) $(\neg A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B \wedge C))$
 (l) $(A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B \rightarrow C))$
 (m) $(A \rightarrow (B \wedge C)) \leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C)$
 (n) $(A \rightarrow (B \vee C)) \leftrightarrow (A \rightarrow B) \vee (A \rightarrow C)$

18. Verificare che i condizionali inversi di (e), (f), (i) e (l):

$$\begin{aligned} ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow B) & \quad (A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \\ ((A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B \wedge C)) \rightarrow (A \rightarrow B) & \quad ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C) \end{aligned}$$

non sono tautologie.

19. Verificare se le seguenti coppie di forme proposizionali sono logicamente equivalenti:

- (a) A $(A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$
 (b) $\neg(A \wedge B)$ $\neg A \vee \neg B$
 (c) $A \rightarrow B$ $\neg B \rightarrow A$
 (d) $A \vee B$ $\neg B \rightarrow A$
 (e) $A \wedge B$ $\neg(A \rightarrow \neg B)$
 (f) $\neg(A \vee B)$ $\neg B$
 (g) $A \underline{\vee} B$ $(\neg A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B)$
 (h) $\neg(A \wedge B)$ $\neg A \rightarrow \neg B$
 (i) $A \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow B))$ $B \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow A))$

20. Verificare se le seguenti coppie di forme proposizionali sono logicamente equivalenti:

- (a) $A \wedge (B \rightarrow C)$ $B \wedge (A \rightarrow C)$
 (b) $A \wedge B \rightarrow C$ $A \rightarrow C$
 (c) $A \vee B \rightarrow C$ $(A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C)$
 (d) $A \wedge (B \vee C)$ $(A \wedge B) \vee C$
 (e) $A \vee B \rightarrow C \wedge \neg C$ $\neg A \wedge \neg B$

21. Come si è detto, la “o” del linguaggio comune è ambigua in quanto può essere usata sia in senso inclusivo che in senso esclusivo. Per evitare ambiguità si può precisare, per la disgiunzione inclusiva, “A o B o entrambi” e, per disgiunzione esclusiva, “A o B e non entrambi”. Nelle due locuzioni ora impiegate la “o” è inclusiva o esclusiva? Verificare che non fa differenza in quanto le due coppie di forme proposizionali:

$$\begin{aligned} (A \vee B) \vee (A \wedge B) & \quad (A \underline{\vee} B) \underline{\vee} (A \wedge B) \\ (A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B) & \quad (A \underline{\vee} B) \wedge \neg(A \wedge B) \end{aligned}$$

sono logicamente equivalenti.

22. Stabilire se la forma proposizionale a sinistra è o non è conseguenza logica della forma proposizionale a destra:

- (a) $\neg(A \wedge B)$ $\neg(A \vee B)$
 (b) $A \vee B$ $A \underline{\vee} B$
 (c) A $B \rightarrow A$
 (d) $B \rightarrow A$ A
 (e) $B \rightarrow (A \wedge B)$ A

23. Stabilire se la forma proposizionale a sinistra è o non è conseguenza logica della forma proposizionale a destra:

- (a) $(A \wedge B) \rightarrow \neg C$ $(A \wedge \neg B) \rightarrow C$
 (b) $\neg C \rightarrow (A \rightarrow \neg B)$ $A \rightarrow (B \rightarrow C)$
 (c) $(A \vee B) \rightarrow C$ $B \rightarrow C$
 (d) $\neg A$ $(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow \neg B)$

24. Dire quali delle seguenti forme proposizionali sono conseguenza logica delle premesse $A \vee B$ e $A \vee C$:

(a) A (b) $B \vee C$ (c) $\neg A \rightarrow (B \wedge C)$ (d) $(B \wedge C) \rightarrow \neg A$ (e) $(\neg C \rightarrow A) \wedge (\neg B \rightarrow A)$

25. Verificare che la forma proposizionale $\neg A$ è conseguenza logica delle forme proposizionali A \rightarrow B , $B \rightarrow C$, $\neg C$.

26. Verificare che la forma proposizionale $A \rightarrow \neg C$ è conseguenza logica delle forme proposizionali $A \rightarrow \neg B$, $C \rightarrow B$.

27. Verificare che la regola:

$$\frac{A}{A \vee B}$$

è logicamente corretta, mentre è scorretta la seguente:

$$\frac{A}{A \vee \neg B}$$

28. Verificare che la seguente regola è corretta:

$$\frac{A \rightarrow B \quad A \rightarrow \neg B}{\neg A}$$

29. Verificare che la seguente regola è corretta:

$$\frac{A \rightarrow (B \rightarrow C) \quad A \rightarrow B}{A \rightarrow C}$$

30. Verificare che la seguente regola è corretta:

$$\frac{A \rightarrow C \quad B \rightarrow C}{(\neg A \rightarrow B) \rightarrow C}$$

31. Verificare che la seguente regola è corretta:

$$\frac{A \vee B \quad C \rightarrow \neg B}{C \rightarrow A}$$

Verificare le seguenti inferenze sono corrette o scorrette

32. “Se Carlo ha vinto la gara, allora Mario è arrivato secondo oppure Sergio è arrivato terzo. Sergio non è arrivato terzo. Quindi, se Mario non è arrivato secondo, allora Carlo non ha vinto la gara”.

33. “Se Carlo ha vinto la gara, allora Mario è arrivato secondo oppure Sergio è arrivato terzo. Mario è arrivato secondo. Quindi, se Carlo ha vinto la gara, allora Sergio non è giunto terzo”.

34. “Se Carlo ha vinto la gara, allora Mario è arrivato secondo e Sergio è arrivato terzo. Mario non è arrivato secondo. Pertanto Carlo non ha vinto la gara”.

35. “Se Carlo ha vinto la gara, allora, se Mario è arrivato secondo, allora Sergio è arrivato terzo. Mario non è arrivato secondo. Quindi, o Carlo ha vinto o Sergio è arrivato terzo”.

36. “Se giochi e studi supererai gli esami, ma se giochi e non studi non supererai gli esami. Pertanto, se giochi, allora o studi e supererai gli esami o non studi e non supererai gli esami”.

RISPOSTE

1. Sono proposizioni (a), (c), (f), (g), (i), (l).
2. In (a), (c), (h).
3. In (a), (d), (f) inclusiva; in (b), (c), (e) esclusiva.
4. “ma” e “benché” equivalgono alla congiunzione logica \wedge ; “senza” equivale a “e non” (“John è in Italia” $\wedge \neg$ “John ha il passaporto”); “dato che” e “perché” sono indicatori di premesse: le due proposizioni sintetizzano un’applicazione del modus ponens: “Se Giorgio è nato a Imperia, allora Giorgio è italiano”, “Giorgio è nato a Imperia”, quindi “Giorgio è italiano” e “Se David è nato a Barcellona, allora David è spagnolo” e “David è nato a Barcellona”, quindi “David è spagnolo”; analogamente “e quindi” è un indicatore di conclusione: “Se oggi è bello, allora vado in barca” e “Oggi è bello”, quindi “Vado in Barca”; “A a meno che B” significa in genere “se non B, allora A” o anche, equivalentemente, “B o A”; “precisamente” ed “esattamente” in genere equivalgono a “se e solo se”.
5. Aldo e Vincenzo no, Paolo sì.
8. (a) $\neg A \wedge \neg B \wedge C$ (b) $\neg A \wedge B \wedge C$
 (c) $(A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C)$ (d) $A \vee B \vee C$
 (e) $(A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C)$ (f) $\neg(A \wedge B \wedge C)$
 (g) $(A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C)$
9. (a) $(A \wedge B \wedge C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C)$
 (b) $(A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C)$
 (c) $(A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C)$
 (d) $(A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C)$
 (e) $(\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C)$
10. (a) $\neg A$ (b) $A \wedge B$ (c) $A \wedge B$ (d) $\neg(A \wedge B)$
 (e) $\neg A \rightarrow \neg B$ (f) $\neg(A \rightarrow B)$ (g) $A \rightarrow \neg B$
 (h) $A \leftrightarrow B$ (i) $A \vee (\neg A \rightarrow B)$ (l) $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$
11. (a) $A \wedge \neg B$ (b) $D \rightarrow B \wedge C$ (c) $\neg A \wedge \neg B \rightarrow$ (d) $D \leftrightarrow C \wedge \neg A$
 (e) $C \vee (\neg B \wedge \neg D)$ (f) $D \rightarrow (\neg C \rightarrow A)$ (g) $(D \leftrightarrow C) \wedge (D \rightarrow \neg B)$ (h) $A \wedge B \rightarrow (\neg D \rightarrow C)$
 (i) $(\neg B \wedge \neg A) \vee D \rightarrow C$ (l) $(A \rightarrow B \vee C) \wedge (\neg A \rightarrow C \wedge D)$
 (m) $(\neg B \wedge \neg C \rightarrow D) \rightarrow A$ (n) $(A \wedge B \wedge C \leftrightarrow \neg D) \wedge (\neg A \wedge \neg B \rightarrow (C \rightarrow D))$
12. (a) **V V F V** (b) **V F F V** (c) **V F F V** (d) **V F V V** (e) tautologia
 (f) **F V F V** (g) tautologia (h) tautologia (i) tautologia
13. (a) tautologia (b) **V V V F F V V V** (c) tautologia (d) **V V V V V V**
F F
 (e) **V V V F V F V V** (f) tautologia (g) **F F V V V F V V**
 (h) **V V V F V F F F** (i) **F V V V V V V F**
19. Sono logicamente equivalenti (a), (b), (d), (e), (g), (i).
20. Sono equivalenti (c) e (e).
22. La conseguenza logica sussiste in (a), (d) e (e).
23. La conseguenza logica sussiste in (b) e (d).
24. (c) e (e).
32. Corretta.
33. Scorretta.
34. Corretta.
35. Scorretta.
36. Corretta.