Di prossima pubblicazione in Di Giorgio, Alfredo & Chiffi, Daniele (2013), *Prova e giustificazione*, Giappichelli, Torino (collana Digitalica).

Il concetto di prova da Frege a Wittgenstein[*]

Carlo Penco

Parte delle riflessioni di Wittgenstein sul concetto di prova[1] sono una critica di alcune idee di Frege; quando Frege sostiene che usare le leggi logiche e dubitarne è un tipo di follia, Wittgenstein si domanda che tipo di follia potrebbe essere questa[2]. Molte delle sue osservazioni su giochi linguistici “devianti” o “alieni” sono un tentativo di rispondere a questa domanda[3]. La distanza tra i due autori è dunque profonda, e riguarda principalmente l’atteggiamento verso il platonismo matematico; però Wittgenstein ha sempre mantenuto alcuni principi fregeani, specialmente l’idea di “prova” matematica o logica come qualcosa di normativo, cioè essenzialmente differente da un esperimento (seguito in questo da autori come Kreisel in antagonismo con il “quasi empirismo” matematico di Lakatos). In questo mio saggio vorrei illustrare le idee base di Frege sul concetto di “prova” per mostrare quanto di queste idee è rimasto e quanto è stato abbandonato da Wittgenstein, per concludere con una breve analisi del punto di vista di Wittgenstein sulla prova di Gödel.

1. FREGE E LA VISIONE PRAGMATICA DELLA PROVA

1.1 Oltre il rigore Euclideo: la catena senza lacune – Certamente la storia della matematica occidentale ha un ideale di rigore: l’ideale euclideo della dimostrazione. Ed è quello che Frege ricorda all’inizio della prima sezione dei *Fondamenti dell’aritmetica*: “dopo essersi allontanata per qualche tempo dal rigore euclideo, la matematica oggi vi fa ritorno e cerca anzi di superarlo”. Cosa intende Frege parlando di “superare” lo standard di rigore euclideo? In che senso “per molte delle cose che un tempo erano ritenute auto-evidenti, oggi si richiede una dimostrazione”?

Frege è sicuramente colpito dallo sviluppo delle geometrie non euclidee. La scoperta delle geometrie non euclidee è un esempio di un aspetto di mancanza di rigore nelle dimostrazioni di Euclide: Euclide non era riuscito a rendere inattaccabile la sua costruzione, a causa dell’inserimento del famoso V postulato che aveva sufficiente evidenza per essere considerato assioma, ma al contempo non poteva essere dimostrato. Come ricorda Frege (1884, § 2) “quando non ci si è più potuti accontentare del rigore euclideo, si sono dovute intraprendere le ricerche collegate all’assioma delle parallele”.

Ma in cosa consiste la manchevolezza del rigore “euclideo”? Nel saggio “sulla giustificazione scientifica di una notazione concettuale”, scritto poco dopo la *Ideografia* e prima dei *Fondamenti dell’aritmetica*, Frege nota che il problema di Euclide è che “spesso fa uso tacito di presupposizioni” e quindi “non risponde alla richiesta sistematica che tutti i modi di inferenza

[*] Ringrazio Carlo Dalla Pozza, Daniele Chiffi, Morgana Chiappalone, Marcello Frixione e un referee anonimo: le loro letture attente di una versione precedente del lavoro hanno aiutato a renderlo meno confuso e più leggibile. Ogni errore comunque va attribuito all’autore che non sempre ha saputo utilizzare al meglio i consigli e i dubbi postigli.

[1] In quanto segue uso “prova” e “dimostrazione” senza particolare distinzione; la maggior parte del lavoro è dedicato quasi esclusivamente al concetto di prova in logica o in matematica.

[2] OFM I:151/I:152. Wittgenstein si riferisce a un’osservazione fatta da Frege nell’introduzione ai *Principi fondamentali dell’aritmetica* del 1893.

[3] Su questo problema ho iniziato a lavorare a partire da Penco 2008, che individua in questa reazione a Frege una delle fonti del cosiddetto “antropologismo” di Wittgenstein.

impiegati in un una prova debbano essere specificati prima" (Macbeth 2005, p. 12). Le presupposizioni *tacitamente* usate da Euclide[4] non sono leggi logiche, ma vengono di fatto usate per legittimare inferenze, anche se non sono esplicitate. Contro questa tradizione *de facto* Frege osserva che nessun presupposto può rimanere inosservato; infatti sono proprio i presupposti assunti tacitamente e senza chiara consapevolezza che ostacolano la "comprensione della natura epistemologica di una legge" (cfr. Frege 1893, p.VII). In una lettera a Jourdain del 1902 Frege ricorda come sia stato proprio "il bisogno di escludere con certezza ogni presupposizione tacita nella fondazione della matematica [che] mi ha portato alla notazione concettuale del 1879".

Il postulato euclideo delle rette parallele è un caso emblematico di questa manchevolezza. Hilbert vede nel dibattito sulle geometrie non euclidee una riprova del fatto che la geometria può essere presentata come teoria assiomatica in cui i termini primitivi ("punto", "retta", "piano") si possono definire implicitamente in base agli assiomi della teoria, senza attribuire loro proprietà intuitive. A differenza di Hilbert, Frege vede nello stesso dibattito una riprova che la geometria è una scienza sintetica a priori; infatti, dato che possiamo negare un assioma come quello delle parallele e ottenere un'altra geometria, sebbene gli assiomi siano a priori, non si può negar loro un carattere sintetico e legato all'intuizione.

Occorre distinguere il problema dell'intuizione dipendente dagli assiomi specifici della geometria, che sono per Frege il motivo per definire la geometria una disciplina sintetica e legata all'esperienza dello spazio, dal problema dalle intuizioni che si possono inserire nella catena dimostrativa (sia in geometria, sia in aritmetica). Quando Frege definisce l'aritmetica come analitica, si riferisce al fatto che i suoi assiomi non hanno alcun aspetto intuitivo, e la giusificazione delle verità aritmetiche è meramente analitica, derivante cioè da leggi logiche. In matematica occorre che ogni singolo passaggio sia "giustificato", sia cioè un passaggio dimostrativo, sorretto da un assioma o da una regola esplicita; questo deve valere anche per i passaggi che appaiono più evidenti perché confermati dall'applicazione: "Certo, formule numeriche come 5+7 = 12 e leggi come l'associatività dell'addizione sono confermate ampiamente dalle innumerevoli applicazioni che ne facciamo ogni giorno che può sembrare quasi ridicolo volerle mettere in dubbio con la richiesta di una dimostrazione. Ma è insito nell'essenza della matematica che essa, ovunque sia possibile una dimostrazione, preferisca questa a una conferma induttiva"(Frege 1884, §2). Peraltro anche nella tradizione razionalista, che riteneva fondamentale una dimostrazione delle formule aritmetiche elementari, si trovano lacune nelle dimostrazioni: un caso esemplare è la dimostrazione che Leibniz fa a proposito di "2+2=4", ove Frege individua una lacuna[5]. La precisazione di Frege sulla dimostrazione di Leibniz è un bell'esempio dell'idea di prova come "*catena senza lacune*" definita nel suo primo libro, l'*Ideografia* del 1879, come una *prova in cui ogni passo è giustificato da un assioma o da una regola esplicita*.

---

[4] Frege 1882 dà come esempio delle assunzioni non espresse nella dimostrazione del 19° teorema del I libro degli *Elementi* (IN OGNI TRIANGOLO IL LATO MAGGIORE È OPPOSTO ALL'ANGOLO MAGGIORE): (1) Se un segmento non è maggiore di un altro segmento, allora esso è minore o uguale ad esso; (2) Se un angolo è uguale a un altro, allora non è maggiore di esso; (3) Se un angolo è minore di un altro, allora non è maggiore di esso. Si pensi anche agli *assiomi di continuità* di Hilbert, necessari a dimostrare le proposizioni di esistenza che accompagnano le esecuzioni delle costruzioni.

[5] Per Leibniz era semplice. Date le definizioni: (1) 2= 1+1; (2) 3= 2+1; (3) 4= 3+1 e dato l'assioma "L'uguaglianza resta valida sostituendo uguali a uguali" la dimostrazione proseguiva:
(4) 2+2 = 2+1+1 (per definizione 1)
(5) 2+1+1 = 3+1 (per definizione 2)
(6) 2+2=4 (da (4) e (5) per definizione (3)
Frege nota una lacuna nascosta che impedisce di giustificare il passaggio da (4) a (5). infatti Leibniz avrebbe dovuto scrivere (4*) 2+2 = 2+(1+1); (5*) (2+1)+1 = 3+1.
Ma cosa mi giustifica la uguaglianza (7) che è essenziale nel passaggio da (4) a (5)?
(7) 2+(1+1) = (2+1)+1
Dobbiamo assumere una legge logica generale che giustifichi (7) e questa è la proprietà associativa dell'addizione (8), che non viene esplicitata nella dimostrazione di Leibniz (ma è una delle leggi del pensiero di Boole) e che riempie una lacuna nella dimostrazione:
(8) $a + (b + c) = (a + b) + c$

L'aritmetica è un campo in cui si può cercare di realizzare quell'ideale di rigore euclideo che Euclide stesso non era riuscito a realizzare e che consiste nell'esplicitare tutti i presupposti nascosti, evitando che l'intuizione si inserisca nelle dimostrazioni. L'idea di dimostrazione come "catena senza lacune" è dunque una critica implicita al procedere dei matematici che tralasciano la precisione dei passaggi dimostrativi, rendendo difficile capire se una dimostrazione contenga o meno aspetti intuitivi sintetici, o sia puramente a priori e analitica.

L'esigenza di andare oltre la pratica tradizionale dei matematici nasce dunque dalla preoccupazione di evitare l'irruzione inconsapevole dell'intuizione in matematica, intuizione che ha certamente un valore positivo nell'ideare nuove dimostrazioni, ma rischia di lasciar passare lacune in cui si insinuano la possibilità di non riconoscere possibili alternative[6]. Ma l'idea di una prova in cui tutti i presupposti vengano esplicitati rientra ancora nell'*ideale* euclideo, anche se esso non era mai stato realizzato, nemmeno da Euclide. Il passo fondamentale e nuovo che Frege svolge oltre l'ideale euclideo è quello di richiedere anche un *insieme definito, esplicito e completo di regole dimostrative*. Questo manca in Euclide e in tutta la storia della logica e della matematica: nasce con Frege l'idea di sistema formale come composto da un insieme chiuso di assiomi e un insieme chiuso e definito di regole di inferenza. È questo che fa di Frege il fondatore della "nuova logica". Boole aveva ideato un insieme completo di regole dimostrative, ma non aveva un sistema di assiomi né un linguaggio specifico per la matematica (ma solo diverse interpretazioni delle formule); Peano, come Frege, aveva iniziato a formalizzare il linguaggio dei ragionamenti matematici, ma non aveva presentato esplicite regole dimostrative, anche se – dopo Frege – la scuola di Peano si convertì al sistema assiomatico[7].

Della novità del suo lavoro rispetto alla tradizione "euclidea" Frege è pienamente consapevole, e nell'introduzione dei *Principi* del 1893 dice che:

(1) dato che non tutto può essere dimostrato, occorre che tutti gli enunciati indimostrati di cui si ha bisogno debbano venire espressamente indicati come tali;

(2) "inoltre, *e in ciò vado oltre Euclide*, pretendo che tutti i modi di inferire che vengono applicati siano specificati all'inizio" (Frege 1893, p. VI, sottolineatura mia).

L'idea di un insieme chiuso di regole nasce con Frege e avrà molti sviluppi (specialmente in teoria della dimostrazione o "proof theory"). Quello che oggi si assume come dato, ovvero che una prova logica sia una sequenza finita di formule tale che ogni formula della sequenza è un assioma o è ottenuta da una o più formule che la precedono applicando una singola regola di inferenza, è la realizzazione di un ideale di rigore che costituisce la novità della logica matematica nata con Frege[8].

1.2. Tipi di prova: spiegazione genetica e giustificazione logica – L'ideografia è stata la prima opera a presentare l'ideale di prova logica come "catena senza lacune", dove l'espressione un po' metaforica vuole richiamare i principi (1) e (2) indicati al paragrafo precedente. Ma oltre ai principi metodologici su cosa costituisce una prova, Frege si pone anche il problema di quale sia lo *scopo* di una prova, che consiste in due aspetti[9]:

[6] La preoccupazione è chiarita nel § 90 dei Fondamenti dell'aritmetica: "i matematici … sono paghi se la correttezza di ciascun passaggio che conduce a un nuovo giudizio risulta evidente, e non si interrogano sulla natura di questa evidenza, se essa sia di carattere logico o abbia a che fare con l'intuizione. Un singolo passaggio spesso è assai composito ed equivale a parecchie inferenze semplici, accanto alle quali può ancora insinuarsi qualcosa che deriva dall'intuizione. Nelle dimostrazioni si procede per salti, ...[...]. È impossibile così facendo separare in modo incontrovertibile ciò che è sintetico, e si basa sull'intuizione, da ciò che è analitico

[7] Vedi Borga-Freguglia-Palladino 1985; vedi Frege 1896 ristampato in Frege 2001.

[8] L'idea di catena senza lacune è così presentata in Frege 1884: "Il requisito che nelle deduzioni si debbano evitare salti è dunque irrinunciabile. Che sia così difficile soddisfarlo è dovuto alla tediosità insita nel procedere passo per passo. Ogni dimostrazione appena un po' complessa minaccia di assumere una lunghezza spropositata. (…) [Scopo dell'*Ideografia* è] consentire una maggiore concisione e perspicuità notazionali e un'articolazione simile a quella di un calcolo grazie alle poche forme rigide di cui è dotata, così da impedire che l'esecuzione di qualsiasi passaggio non sia conforme alle regole fissate una volta per tutte."

[9] "una dimostrazione non ha solo il fine di elevare la verità di una proposizione al di sopra di ogni dubbio, bensì anche quello di consentirci di cogliere in che modo certe verità dipendono da altre verità. Una volta che ci si è persuasi dell'inamovibilità di un

(A) dare “certezza” o “sicurezza” alla proposizione provata;
(B) indicare su quali fondamenta la proposizione è stata provata.

Il secondo aspetto è l’aspetto della giustificazione, ed è l’aspetto che è più rilevante per individuare il *tipo* di prova: se la prova contiene aspetti empirici o intuitivi, allora la prova è una prova empirica o intuitiva (sintetica); solo se contiene unicamente passi giustificati logicamente, derivabili cioè da assiomi logici e regole logiche, la prova è una prova a priori e ha valore puramente logico[10].

Le prove logiche come catene senza lacune basate su assiomi o regole logiche mostrano il *tipo di giustificazione* che fonda una proposizione; l’epistemologia fregeana dà una grande importanza alla distinzione tra ciò che in seguito Reichenbach avrebbe chiamato “contesto della scoperta” e “contesto della giustificazione”. La distinzione è ben chiara in un passo dei *Fondamenti dell’Aritmetica*:

> “Non di rado accade che prima afferriamo il contenuto di una proposizione e successivamente, attraverso un cammino diverso e più arduo, perveniamo alla dimostrazione rigorosa, grazie alla quale spesso veniamo a conoscerne più esattamente le condizioni di validità. Pertanto si deve, in generale, tenere distinta la domanda relativa al modo in cui perveniamo al contenuto di un giudizio da quella donde traiamo la giustificazione per la nostra asserzione.”[11]

Occorre cioè distinguere il problema della genesi delle cose che riteniamo vere dalla giustificazione che diamo di esse. Il concetto di *prova* riguarda la *giustificazione*, e non la genesi. Se dessimo importanza alla genesi, allo status psicologico e neurofisiologico della nostra mente nell’eseguire una dimostrazione “dovremmo anche concludere che nella dimostrazione del teorema di Pitagora occorra menzionare il tasso di fosforo contenuto nel cervello umano necessario per eseguirla”. Ma non è così. La prova assurge a uno *status* autonomo dal modo in cui arriviamo ad eseguirla; quando eseguiamo una prova riconosciamo una struttura oggettiva, una successione di passi che può essere riprodotta da chiunque, anche se tramite diversi modi psicologici o diversi stati neurofisiologici. La tesi di Frege è una specie di funzionalismo *ante litteram*: è la funzione della prova che conta, non la realizzazione psico-neurologica di chi inventa, realizza o esegue la prova.

1. 3. La catena senza lacune: la prova come procedura. Frege e Carroll. – La “catena senza lacune” è un’immagine metaforica, che è collegata al fatto che Frege, per la prima volta con chiarezza nella storia della logica, fa una distinzione tra *leggi* logiche e *regole* logiche. Lo stesso Husserl lavorò ampiamente su questo problema[12], ma non riuscì a trovare quella chiarezza che Frege trovò nella presentazione del suo sistema logico. La distinzione, in breve, è la seguente: una legge è una verità accettata, mentre una regola è una procedura di azione. Una regola presenta uno schema di azioni da seguire, mentre una legge logica, per Frege, è qualcosa di autoevidente (tale cioè che la sua verità deriva dalla comprensione del senso dei temini logici in

blocco di roccia dopo aver tentato invano di spostarlo, ci si può porre l’ulteriore interrogativo circa che cosa lo sostenga così saldamente” Frege, 1884, §2.

[10] Frege, 1884, §3: “Le distinzioni fra *a priori* e *a posteriori,* sintetico e analitico, riguardano, a mio avviso, non il contenuto del giudizio, bensì la giustificazione per la formulazione del giudizio. Laddove questa giustificazione manchi, viene meno anche la possibilità di una tale classificazione. Un errore *a priori* è un’assurdità, paragonabile a qualcosa come un concetto azzurro. […] Se […] è possibile dare la dimostrazione basandosi esclusivamente su leggi generali, che a loro volta non sono né passibili né bisognose di dimostrazione, allora la verità è *a priori*.”

[11] Frege 1884, §3. La distinzione è di fatto una ripresa della distinzione fatta nei *Nouveaux Essays* da Leibniz e citata anch’essa nel testo di Frege: "Il problema qui non è quello della storia delle nostre scoperte, che è diversa in diversi uomini, ma riguarda la connessione e l’ordine anturale delle verità, che è sempre lo stesso.” (Frege 1884, § 17).

[12] Vedi ad es. Centrone 2009

essa contenute) o la conclusione di una serie di azioni o passaggi inferenziali[13]. L'esecuzione di una prova è l'applicazione di regole che indicano i "passi" da compiere, cioè le azioni da eseguire. Una vera teoria della prova logica dovrebbe essere dunque inserita in una teoria dell'azione o in una pragmatica formale[14]. Il fulcro di una teoria del genere è riconoscere l'asserzione come una specifica azione, l'azione di riconoscere un contenuto proposizionale come vero. Frege non solo fa questo, ma indica anche con un segno specifico l'atto linguistico dell'asserzione (il segno di asserzione: "|—"). Nell'*Ideografia* Frege presenta la regola del *Modus Ponens* o regola di separazione come la regola base del sistema logico[15]. La regola viene solitamente espressa in logica nel modo seguente: "A → B, A |- B", cioè come una derivazione da una sequenza di enunciati. Frege presenta invece la regola come una sequenza di asserzioni, anteponendo a ogni enunciato il suo speciale segno di asserzione.

La giustificazione del *Modus Ponens* è stata posta in dubbio da un'argomentazione di Lewis Carrol, che è divenuta un tema classico di filosofia della logica. Raramente peraltro le discussioni sul *Modus Ponens* hanno messo in luce l'importanza della distinzione tra enunciati (o proposizioni) e asserzioni (atti linguistici) fatta da Frege[16]. Cercare di spiegare il *modus ponens* senza tale distinzione porta facilmente a un regresso all'infinito, come ben argomentato nel saggio di Lewis Carroll intitolato "Quello che disse la tartaruga ad Achille". L'argomento della tartaruga di Carroll è riassumibile così: se intendo il *Modus Ponens* come una sequenza di enunciati veri (o proposizioni vere), allora ho bisogno di un altro *Modus Ponens* per poter passare dalle premesse alla conclusione. Dati:

(1) A –> B
(2) A
(3) B

per arrivare alla conclusione B devo giustificare il fatto che se (1) e (2) sono vere, allora (3) è vera. Ma questo è a sua volta un condizionale; per poter accettare il conseguente di questo condizionale, dovrei avere ancora una premessa che mi dica che (1) e (2) sono vere affinché io possa concludere che (3) è vera. Abbreviando la proposizione "(1) e (2) sono vere" con C e "(3) è vera" con D, dovrei cioè avere qualcosa come:

(4) C –> D (cioè: se (1) e (2) sono vere allora (3) è vera)

---

[13] Per questo *l'auto-evidenza non è una proprietà psicologica, ma semantica*: una volta dato il senso del condizionale, la verità dell'assioma risulta "costituita" da questo senso; basta quindi la comprensione del senso per riconoscere la verità dell'assioma. In termini wittgensteiniani conosco il senso del condizionale "→" se conosco la sua tavola di verità (le sue condizioni di verità) e comprendo quindi immediatamente che l'assioma (A → (B → A) è vero, senza bisogno di "dimostrazione" (mi bastano le tavole di verità).

[14] Diversi hanno riconosciuto questo aspetto; una particolare versione di questo è l'idea di pragmatica formale di Dalla Pozza 1989, che ha molto influenzato le mie riflessioni su questo punto – anche se in modo in parte indipendente dal suo formalismo.

[15] Frege usa nell'*Ideografia* anche la regola di sostituzione uniforme, anche se non la esplicita chiaramente. Usare solo il modus ponens è ovviamente un'ideale, e nei Principi del 1893 Frge dedica molto lavoro alla presentazione di una serie completa di regole di inferenza che possono aiutare nella giustificazione dei passi delle dimostrazioni.

[16] Accenna alla distinzione Russell, nei *Principia Mathematica* Russell (1910, *introd*. Cap.I, pp. 8-9) che però si limita ad abbozzare una teoria epistemologica: "*la fiducia nell'inferenza è la credenza che se le prime due asserzioni non sono in errore, l'asserzione finale non è in errore*". Geach 1965 pone il problema cone "The Frege Point", che permette di distinguere due occorrenze dello stesso enunciato con o senza il segno di asserzione; è quanto non coglie Ryle 1954. Una breve panoramica in Engel 2007. Il problema si inserisce nel tema della *giustificaxione della deduzione* (titolo di un famoso articolo di Dummett 1973). La discussione contemporanea è sempre più sofisticata – come ho constatato discutendo una tesi di dottorato di Alessia Marabini, seguita da Eva Picardi al Dottorato di Mente, Logica e Linguaggio di Bologna. È utile segnalare almeno il lavoro di McGee 1985 da cui è rinata la discussione sul *modus ponens* e i lavori di Boghossian 2001, 2003, 2008, 2011 con la risposta di Williamson 2003. Boghossian assume una visione inferenzialista del significato per cui il MP è una regola che *costituisce* il significato del condizionale. Quindi un soggetto è autorizzato a *usare* il MP senza per questo dover "conoscere" la regola espressa dal *Modus Ponens* (vedi ad es. Boghossian 2001, p. 26 con un richiamo a Carroll). Una soluzione originale è data da Santambrogio 2007, che distingue tra credenza simpliciter e credenza effettiva, espressa in prima persona. Se il *modus ponens* è espresso in prima persona, non accettare la conclusione sarebbe una specie di infelicità, del tipo dell'eunciato di Moore ("p è vero ma non ci credo"). La tartaruga è dunque servita. (ma vedi anche la risposta di Dummett 2007).

(5) C (cioè: (1) e (2) sono vere)
(6) D (cioè: (3) è vera)

Ma per arrivare alla conclusione D devo giustificare il fatto che se (4) e (5) sono vere allora (6) è vera, e così via all'infinito… e Achille non riesce più ad arrivare in fondo alla regola del *Modus Ponens,* così come non riusciva mai a superare la tartaruga in corsa. Certo ad Achille resta la risorsa di dire: "deambulando solvitur" e fare la derivazione senza giustificarla. Non di tutto si può dare una giustificazione, e non a caso il *Modus Ponens* era per gli stoici uno degli "indimostrabili". Ma "giustificare" non è necessariamente "dimostrare" e usare le basi della logica senza giustificazione è sempre stato un problema per la riflessione filosofica.

Il punto di Frege è distinguere contenuto proposizionale e forza assertoria. I segni di forza assertoria non si possono "comporre" con i segni dei connettivi logici, ma si possono solo anteporre all'intera proposizione; non è possibile cioè esprimere il passo (4) dell'argomentazione di Carroll, come se fosse un semplice condizionale. Nel formalismo di Frege (4) dovrebbe infatti risultare essere "|— A → B ∧ |— B quindi |— C" una composizione di segni di forza assertoria e segni di connettivi ("∧") proibita nel linguaggio Fregeano. Il pasaggio viene bloccato. Il *Modus Ponens* si presenta in Frege come una regola di azione su contenuti proposizionali; la regola indica i passi da fare: due azioni assertorie rendono lecita o giustificata una terza asserzione; in altre parole riconoscendo o asserendo la veritò di *A->B* e di *A*, sono *autorizzato* a riconoscere o asserire *B* come vero:

|– A –> B
|– A

|– B

L'argomentazione della tartaruga confonde il problema della giustifcazione della verità degli enunciati con il problema della giustificazione delle asserzioni. Forse la tartaruga potrebbe creare un regresso all'infinito che riguarda la giustificazione degli atti assertori; ma la distinzione tra assiomi e regole mette comunque a disposizione sia una giustificazione pragmatica che una semantica.

Una giustificazione pragmatica potrebbe essere banalmente espressa dicendo che in Frege la regola è una procedura che permette di passare dall'asserzione di un condizionale e l'asserzione del suo antecedente all'asserzione del conseguente. Rendendo Frege un po' wittgensteiniano, si può dire che il Modus Ponens è una regola che si segue "ciecamente".[17] In un certo senso questo darebbe ragione alla risposta intuitiva di Achille (*deambulando solvitur*) in quanto il *modus ponens* è l'espressione di una pratica, di una sequenza di azioni. È un po' come se Achille rispondesse alla tartaruga: "non guardare, agisci!". In termini informatici il "quindi" della regola è analogo a una *regola di produzione*: se in input hai "p → q" e "p", esegui l'azione di produrre in output "q". In altre parole quando vengono date due mosse (asserzioni), si passa alla terza mossa senza ulteriori giustificazioni; il meccanismo del passaggio alla conclusione è "attivato" dalla presenza delle due asserzioni[18]. Ma la pratica, benché possa essere stata consolidata

[17] Questo tipo di riconoscimento del seguire una regola ciecamente va ovviamente legato all'idea che le tavole di verità del condizionale siano *costitutive del significato* del *Modus Ponens* (ad es. come regola di eliminazione del condizionale). Questa strada è considerata ad es. da Boghossian (vedi nota precedente) che parla non a caso di "blind reasoning". D'altra parte per Wittgenstein la logica è un insieme di regole e "ogni proposizione della logica è un modus ponens rappresentato in segni (e il modus ponens non si può esprimere mediante una proposizione") (Wittgenstein 1921, § 6.1264).

[18] Ho un po' imitato l'idea di Prawitz 2007 di immedesimarsi in Achille: per Prawitz 2007 Achille "avrebbe dovuto esortare la tartaruga dicendo: Per favore. Inferisci. Agisci. Inferisci B da A. Fai questa operazione. Per favore, fallo. Non vedi che ora hai un fondamento per B ? Certamente il dialogo è formulato in modo che Achille provi a forzare la tartaruga, quindi lei potrebbe opporsi e dire di non voler agire. Il dialogo potrebbe essere perciò formulato in modo che la tartaruga risponda: Per favore, dimmi come posso essere giustificata nel farlo. La cosa ragionevole da dire sarebbe: "Per favore, metti in atto l'inferenza".

dall'esperienza, non corrisponde però a una vera e propria *giustificazione,* sia pur pragmatica; qualcuno vorrebbe dire "le giustificazioni hanno un termine" e non è possibile giustificare tutto (ricordo una osservazione di Kreisel contro Dummett a questo proposito).

Una giustificazione semantica è una giustificazione data nel metalinguaggio semantico – assumendo il significato del condizionale materiale (la sua tavola di verità). È una vecchia idea di Wittgenstein che aveva suggerito, in una conversazione con Waismann del 1930, che "la deduzione non ha niente a che vedere con il 'se'. Nella mia notazione, la correttezza della deduzione si mostra nel fatto che "p → q" diventa una tautologia".[19] E' un modo apparentemente più contorto di dire, come avrebbe detto Quine, che l'implicazione può essere espressa come la validità di un condizionale. Si potrebbe illustrare la *validità* di un condizionale con la figura suggerita da Wittgenstein: asserire la validità di un asserto condizionale è analogo a tracciare una riga sopra l'unica possibile combinazione che dà il falso:

A B	A → B
V V	V
~~V F~~	~~F~~
F V	V
F F	V

Questo comporta che, se il condizionale "A → B" è asserito come vero, non vale lo stato di cose rappresentato da A = vero e B = Falso. Se volessimo proseguire l'esempio grafico potremmo dire che asserire la verità di A è come eliminare i casi in cui A è falso:

A B	A –> B
V V	V
~~V F~~	~~F~~
~~F V~~	~~V~~
~~F F~~	~~V~~

Nella tavola di verità non resta che la prima riga, dove sia A che B sono veri. Quindi non si può che asserire B, dato che, nella parte sinistra della tavola che rappresenta le situazioni possibili, B è rimasta l'unica opzione disponibile. La prova della verità di B è in tal modo una catena senza lacune. Ma è una catena di *azioni* su proposizioni, non una catena di proposizioni; parlare di azioni – come tracciare una riga – sulle situazioni rappresentate o sulle condizioni di verità è peraltro un modo per mostrare che senza nozione di verità non si ha *modus ponens;* in tal modo il Wittgenstein del 1930 sembra suggerisca una giustificazione semantica di una procedura argomentativa.

L'analisi delle procedure di verifica delle tavole di verità del condizionale mostra come ci siamo convinti a passare dalle premesse alla conclusione. E' una relazione precisa tra il senso "logico" (verocondizionale) e il senso "cognitivo" (procedurale). Infatti il senso "logico" di un enunciato condizionale è dato dalle tavole di verità, ma la procedura per verificare la validità del *Modus Ponens* è una serie di azioni sulla tavola di verità (cancellazione delle righe non valide a seconda degli input delle premesse). Wittgenstein, suggerendo la banalissima cancellazione delle righe della tavola di verità, rappresenta così un primo esempio di versione "procedurale"

[19] [WVC] p.92 (5 gennaio 1930). Purtroppo nella edizione italiana manca la linea tracciata sulla seconda riga del condizionale in modo da lasciare solo i valori "V" (in tedesco ovviamente "W") nella tavola del condizionale, trasformandolo, eni termini di Wittgenstein, in una tautologia. La mancanza grafica rende poco comprensibile l'esempio nell'edizione italiana. Storicamente la discussione sembra dipendere sia dal fatto che agli inizi del '900 da una parte era ancora in uso la scelta di Peano di chiamare "deduzione" ogni proposizione che conteneva un condizionale e dall'altra che si parlava di "implicazione materiale" per parlare del condizionale.

dell'inferenza: fare un'inferenza è svolgere certe azioni sulla base di regole la cui pratica è fissata da certe configurazioni – le tavole di verità – su cui vengono eseguite operazioni.

2. WITTGENSTEIN PRO E CONTRO FREGE

Introduzione: Frege e Wittgenstein – Wittgenstein fu uno dei più fedeli lettori di Frege, di cui tenne sempre fermi alcuni principi fregeani; al contempo Frege era per lui un obiettivo polemico. Questo rapporto ambivalente con Frege rappresenta una delle maggiori difficoltà dell'interpretazione del pensiero di Wittgenstein.

Con Frege Wittgenstein ritiene la prova normativa e a priori, non derivata dall'esperienza. Se per Frege la prova logica è una sequenza di atti assertori, per Wittgenstein una prova è una procedura basata sulla pratica del seguire regole, e legata al ruolo che viene ad essa attribuito dalla comunità linguistica (*in primis* dalla comunità dei matematici). *Contro Frege* rifiuta l'idea platonista per cui una dimostrazione non fa altro che rivelare ciò che è dato nel terzo regno dei pensieri. Per Frege il matematico è come un geografo che scopre aree finora inesplorate (1893, p. xv); per Wittgenstein l'idea della prova logica come "scoperta" è fuorviante, e fin dal *Tractatus* egli delinea una visione del procedimento della prova come costitutivo del significato di ciò che è provato: la prova non è la scoperta di un risultato che era già vero, ma la determinazione del significato di ciò che dimostra: "in logica processo e risultato sono una cosa sola" (TLP 6.1261).[20]

Wittgenstein critica il platonismo fregeano e l'importanza data da Frege alla logica in matematica. Come Frege parlava della "funesta irruzione della psicologia nella logica", così Wittgenstein parla della "funesta irruzione della logica in matematica" OFM IV, 24). Ma la sua insistenza sull'aspetto "normativo" della prova, e sulla differenza tra prova ed esperimento, lo colloca accanto al punto di vista "anti-naturalista" di Frege. Dalle riflessioni di Wittgenstein si possono cogliere alcune tesi[21] sul concetto di prova in matematica (e in logica): (i) *normatività*: la prova ha una *carattere normativo*, a differenza di un esperimento (ii) *creatività*: la prova non scopre, ma inventa nuovi concetti (iii) *riconoscimento*: la prova funge da *paradigma* il cui riconoscimento sociale è essenziale; (iv) *perspicuità*: la prova deve essere *perspicua* e riconoscibile (iv) *indistaccabilità*: la prova è indistaccabile dal metodo di prova; è sempre strettamente *connessa a un sistema*; non esistono prove fuori da un sistema matematico o logico. Quest'ultimo aspetto sarà fondamentale per capire le critiche di Wittgenstein alla prova di Gödel, su cui farò alcune brevi osservazioni conclusive.

2.1. Normatività: prova ed esperimento – Fin dal *Tractatus* Wittgenstein assume una distinzione chiara tra dimostrazione matematica o calcolo ed esperimento: "il calcolo non è un esperimento" (6.2331). Una parte rilevante della produzione successiva di Wittgenstein sarà una elaborazione di questo punto. Considerare prova ed esperimento come due diversi metodi di verifica è un errore che impedisce ogni comprensione filosofica (Wittgenstein 1974, p. 361). Un esempio per capire la differenza è vedere la differenza tra "ripetere una prova" e "ripetere un esperimento". Per ripetere un esperimento devo riprodurre le condizioni iniziali e tentare di riprodurre il

---

[20] Si potrebbe dire che Wittgenstein anticipa il teorema di deduzione per cui da $\vdash A \rightarrow B$ si può derivare $A \vdash B$ (e viceversa); ogni proposizione della logica può essere cioè tradotta in una regola, e – detto in altri termini – "ogni proposizione della logica è un *modus ponens* tradotto in segni". La volontà wittgensteiniana di ridurre la logica e la matematica a un insieme di regole è vista solitamente come un'anticipazione della visione di Gentzen (deduzione naturale).

[21] Questi 5 punti sono intesi anche come "aggiornamento" del mio vecchio lavoro (Penco 1981). La discussione sulla filosofia della matematica di Wittgenstein è diventata molto complessa; ho trattato alcune di queste tematiche in Penco 1994, ma non ho mai discusso, ad es., del concetto di "prova conclusiva" su cui tanto ha scritto Dummett; su questo segnalo le posizioni critiche di Casalegno 2011 che vede nell'idea di prova conclusiva un residuo di vecchio neopositivismo superato da Carnap (per cui "se per verificazione si intende una dimostrazione assoluta di verità, allora [...] nessun enunciato (sintetico) è mai verificabile").

risultato; ma "ripetere una prova non vuol dire riprodurre le condizioni alle quali si è ottenuto, una volta, un determinato risultato; ma vuol dire ripetere ogni passo *e il risultato*" (OFM II,55; cfr. OFM I, 161). È anche possibile che una prova possa essere stata originariamente un esperimento, ma ciò che caratterizza la prova è che essa costituisce un'immagine o un modello in cui certe operazioni hanno un certo risultato. Seguendo la prova io mi convinco che a certe operazioni *deve* seguire un certo risultato; se ho provato che 13+14= 27, questo mi serve da modello per i miei calcoli, e se trovo 13 mele e 14 mele, *so* che ho 27 mele. La prova serve come "misura", è il segno che abbiamo accettato una regola (OFM II; 21-26). Il punto di vista di Wittgenstein è l'espressione dell'idea che la prova matematica ci convince ad assumere certi enunciati come validi a priori, e si basa sulla differenza fondamentale tra l'uso "grammaticale" e l'uso "empirico" degli enunciati: il primo definisce le regole che governano i nostri scambi linguistici e costituiscono i paradigmi accettati che usiamo come metro per i nostri giudizi, mentre il secondo è l'uso dipendente dalle informazioni fattuali.

La distinzione tra "grammaticale" e "empirico" non è una distinzione tra tipi di enunciati (come la distinzione tra analitico e sintetico) ma tra *usi* di enunciati (OFM I, 27, II,39, V,5; UG 98). Al limite uno stesso enunciato può essere usato sia come empirico sia come grammaticale: se un bambino non ha ancora imparato il significato della matematica potrà fare esperimenti per vedere se due mele e tre mele fanno 5 mele; userà l'enunciato "tre più due uguale cinque" come un esperimento; una volta capita la funzione della matematica, userà questo enunciato come uno standard con cui controllare la validità dei suoi calcoli. La connessione tra una prova o una regola e ciò che ne segue non è né causale né empirica, ma è una connessione ancora più rigida, che "ha sede nella grammatica" (OFM I, 128; 164)

2.2 Creatività: il limite dell'empirismo – Ovviamente la prova matematica riflette anche le condizioni fisiche e psicologiche degli umani; infatti se avessimo una fisica diversa (ad es. se ogni tanto gli oggetti sparissero) avremmo anche una matematica differente. Quindi la prova matematica è condizionata dalla struttura fisica del mondo e dalla struttura psicologica degli umani; ma questo non basta a considerare Wittgenstein un naturalista o "quasi-empirista" in matematica[22]. Wittgenstein insiste non solo sul *ruolo* che viene assegnato alla prova matematica (ruolo di regola) ma anche sul carattere di costruzione libera e creativa che caratterizza la spontaneità dei concetti: la prova "crea un nuovo concetto"; è un "nuovo paradigma" (OFM II:41/III:41). Nell'analisi della prova come formazione di concetti si vedono "i limiti dell'empirismo" (OFM II:71/III:71, cfr. III:29/IV:29; V:14/VII:17).

"Il matematico non scopre, inventa" (OFM I:168): se il matematico inventa, una procedura di prova è strettamente connessa al risultato ottenuto e il risultato ottenuto prende luce dal tipo di prova che è stato realizzato (vedi più oltre al § 2.5 indistaccabilità). Questo aiuta a spiegare perché una prova contribuisce non solo a cambiare i nostri concetti, ma a crearne di nuovi. Che una prova costruisca nuovi concetti si vede anche nel fatto che molte domande non esisterebbero se non avessimo sviluppato certi concetti e certe applicazioni matematiche; un esempio di Wittgenstein è: "quante vibrazioni ha questa nota?" La matematica ti ha insegnato a vedere questo tipo di fatti, non ti insegna solo la risposta ma "ti insegna un intero gioco linguistico, con domande e risposte" (OFM V:15/VII:18).

2.3. Riconoscimento: paradigmi e tipi di oggettività – Ciò che differenzia prova matematica e prova empirica è che la prova matematica ha un *ruolo* particolare: essa funge da paradigma e da metro di misura per ulteriori esperimenti. Qualcosa funge da prova sole se viene "posto negli

---

[22] Ho discusso brevemente un confronto con Lakatos e Kalmar già in Penco 1981. Oggi va di moda cercare di vedere in Wittgenstein un "naturalista", anche sulla base di riflessioni legater all'importanza delle nostre inclinazioni naturali: "l'esperimento serviva a mostrare che il modo più naturale è quello che la maggior parte segue. Ora si insegna a tutti a fare così – e ora c'è giusto e sbagliato. Prma non c'era" (LFM, p. 95). Ma questo non basta per parlare di naturalismo: è il *ruolo* che ha la matematica che la rende normativa, e non una semplice generalizzazione dell'esperienza.

archivi" cioè se viene "trattato come prova" dalla comunità, per cui funge da paradigma. Questo comporta che la comunità può decidere di togliere qualcosa dagli archivi e non considerare più come prova qualcosa che prima valeva come tale; i paradigmi possono cambiare, come Wittgenstein ricorda nelle riflessioni *Sulla certezza* e come viene ampiamente ripreso da Kuhn. Il problema è se questo comporta che la prova sia qualcosa di meramente soggettivo e perda il carattere di oggettività che le si attribuisce normalmente. Michael Dummett[23] ha parlato a questo proposito di "diniego dell'oggettività della prova", inteso nel modo seguente:

"certe configurazioni di segni sono prove se e solo se sono trattate come prove da una comunità"

Contro tale tesi Dummett, che considera Wittgenstein un convenzionalista radicale[24], sostiene che un'idea forte di oggettività dovrebbe ammettere che vi siano configurazioni di segni che sono prove anche se *non* sono così trattate da una comunità e che vi siano configurazioni di segni trattate come prove che *non* sono effettivamente delle prove oggettive (e con il tempo si rivelano false prove, come ha dimostrato ampiamente Lakatos).

Ma Wittgenstein non può accettare che certe configurazioni di segni siano prove anche se non sono così usate dalla comunità, perché la sua idea di significato è strettamente legata all'applicazione; una configurazione di segni non ha alcun significato se non ha un uso; e per essere una prova deve aver un certo tipo di uso, deve essere considerata come regola[25]. Il fatto che una prova sia tale solo nel ruolo attribuitole dalla comunità non implica dunque un punto di vista "soggettivo", ma un rifiuto di dare autonomia a strutture di segni staccate dall'uso in un contesto. Dall'assunto che la prova inventa concetti e che è tale per la sua funzione segue la critica al punto di vista platonista di una prova come una struttura autonoma che "riflette" una realtà extra–mondana, ma non segue che la prova sia solo manifestazione di una volontà soggettiva. Un'alternativa al platonismo potrebbe essere il convenzionalismo, ove – una volta date le definizioni e le regole – le conseguenze della dimostrazione sarebbero fissate dalle convenzioni, e quindi "scoperte" nel calcolo della prova. Da una parte, Wittgenstein sembra assumere una posizione più radicale del convenzionalismo estremo, mentre dall'altra dà un ampio riconoscimento ad aspetti non convenzionali, bensì naturali e psicologici: da una parte cioè una prova deve sì essere sempre inserita in un "sistema" di prove, ma non può essere "derivabile" meccanicamente dal sistema; dall'altra deve anche rispondere a certi aspetti di perspicuità psicologica e percettiva. Partiamo da quest'ultimo aspetto.

2.4 Perspicuità – La prova è una prova se è riconoscibile; non solo, ma la prova aiuta a cogliere strutture riconoscibili; in questo Wittgenstein accetterebbe l'idea di Dummett (1991), per cui una prova scopre *strutture* (*patterns*) presenti tra le nostre relazioni concettuali. Ma – a differenza di Dummett – Wittgenstein insiste nel dire che "la struttura non è la prova" (OFM II:11/III:11). Perché ciò che fa di una prova una prova è il suo *ruolo* e non solo la sua forma. La struttura che una prova fa emergere è importante perché aiuta a convincere in quanto "perspicua" (OFM II:1/III:1). Una prova deve poter essere "abbracciata con lo sguardo" (OFM I:153/I:154). Questo è un aspetto centrale dell'accordo che gli umani si trovano ad avere nel riconoscere una certa prova come prova:

[23] Dummett 1959; vedi la discussione di Cozzo 2004.

[24] Dummett 1959; ho criticato l'interpretazione di di Dummett che considera Wittgenstein un convenzionalista estremo in Penco 1994, su cui in parte mi baso nella discussione sul "riconoscimento di strutture".

[25] Quello che egli dice sulle regole di inferenza aiuta a capire il punto: "possiamo considerare le regole di inferenza come tali da dare il significato ai segni, perché sono regole d'uso dei segni […], in questo senso esse non possono essere né giuste né sbagliate" (OFM II, 23/III,23). Qui ovviamente viene subito da pensare alle regole di introduzione e eliminazione di Gentzen, che costituiscono il significato degli operatori logici, ma anche al sistema di inferenze che regolano l'uso delle espressioni linguistiche e sono costitutive del significato, in una visione di semantica inferenziale. Vedi anche Cozzo 2004.

> "Diamo il nome di "prova" solo a una struttura la cui riproduzione sia un compito facile a eseguirsi. Si deve poter decidere con sicurezza se qui ci troviamo effettivamente di fronte alla stessa prova oppure no.(…) Ciò che è essenziale alla prova si deve poter, con sicurezza, riprodurre esattamente." (OFM II:1/III:1).

Questa riflessione (della fine anni '30) ha, tra l'altro, lo scopo di criticare le pretese russelliane della riduzione della matematica a logica. Il limite del riduzionismo logicista infatti riguarda proprio la nozione di prova e il fatto che alla notazione logica di una prova matematica manca il carattere di perspicuità. Una proposizione logica della forma (E…)(E….)→ (E….) ove nei primi due gruppi di parentesi ci fosse un milione di variabili e nel terzo due milioni di variabili non è certo "perspicua"; perché dovremmo dire che è una prova logica quella su cui *si basa* la prova matematica? Un calcolo nel sistema decimale è una prova molto più semplice! Il rischio della notazione di Russell è pensare che il calcolo abbreviato in cifre decimali sia considerato "una pallida ombra del procedimento non abbreviato" (OFM II,19/III,19). Ma l'invenzione del calcolo numerico è l'invenzione di un metodo di prova, che non si limita a mostrare che un certo numero è la somma di due altri numeri mettendo in fila tutte le unità: "la prova, si potrebbe dire, non si limita a mostrare *che* è così, ma mostra *in che modo* è così. Essa mostra *in che modo* 13+14 è uguale a 27".

La discussione sulla perspicuità nasce come critica al tentativo di fondare la prova su qualcosa di non "abbracciabile con lo sguardo"; una prova deve mostrare una *relazione interna* tra il metodo e il risultato e non indicare semplicemente un metodo computazionale che potrebbe essere eseguito automaticamente, ma non potrebbe essere afferrato da un umano. Un esempio di questa discussione riguarda il problema del taglio (il "cut") nella semantica della "proof theory". Le prove che utilizzano il taglio ovviamente sono più "perspicue" delle prove senza il taglio, e al limite le prove "normalizzate" senza il taglio non sarebbero vere e proprie prove. Una interpretazione più estrema del punto di vista di Wittgenstein potrebbe sostenere che le prove normalizzate (senza taglio) si basano sulle prove con taglio e non viceversa (non individueremmo infatti prove normalizzate se non avessimo l'idea della prova usando il taglio)[26].

La posizione di Wittgenstein può sembrare difficile da sostenere di fronte alle prove matematiche che utilizzano processi computazionali realizzati dall'uso di pesanti elaborazioni al computer. Si pensi ai classici esempi delle prove del teorema dei 4 colori e del teorema di Fermat, che richiedono – entrambe – ore di calcolo al computer che non sarebbero nemmeno eseguibili da umani. Apparentemente non possiamo "abbracciarle con lo sguardo" e quindi non potrebbero essere considerate vere prove; ma vengono accettate come tali dalla comunità. Come rispondere a questa sfida?

2.5 Indistaccabilità – Qui si può solo ipotizzare una risposta di Wittgenstein sulla scorta delle sue idee "base" sulla prova. Secondo 2.2 e 2.4 non possiamo negare che la prova del teorema di Fermat e la prova del teorema dei quattro colori sono considerate tali nella comunità ed hanno quindi il ruolo e la funzione di prova, fanno cioè parte dell' "archivio", e la loro perspicuità è data dall'insieme delle strategie di prova che i loro autori hanno presentato. Inoltre, per 2.3 dovremmo dire che hanno cambiato i nostri concetti, e che hanno cambiato il senso dei due teoremi. Ma forse i teoremi non erano chiari anche prima della dimostrazione? Forse che con la dimostrazione di Wiles non si dice più che per il teorema di Fermat non esistono soluzioni intere positive con $n>2$ per l'equazione $a^n + b^n = c^n$? La grandezza di Wiles è aver dato una dimostrazione di *quel* teorema! Certo un atteggiamento platonista in matematica non solo

---

[26] Ma si potrebbe anche sostenere, come fa Marion 2009, che un antirealista radicale potrebbe accettare l'intelligibilità di prove normalizzate o con l'eliminazione del taglio quando l'incremento è mantenuto in tempi polinomiali. Ma in generale è da domandarsi se davvero occorre rigettare il paradigma della "computazione come eliminazione del taglio" per poter accettare il punto di vista di Wittgenstein, o questo non sia invece limitato alla critica filosofica della concezione "esplicativista" per cui le "vere" prove sono quelle senza il taglio e sono il fondamento delle prove "indirette". Il punto, insiste Marion in spirito wittgensteiniano, è che noi *sappiamo* che c'è una prova senza taglio solo perché abbiamo una prova con taglio e non viceversa.

assume che esistano infinite terne pitagoriche (a,b,c = 3, 4, 5…) come soluzione dell'equazione diofantea (quando n=2), ma anche che il teorema di Fermat era vero o falso anche prima di essere dimostrato, e la sua prova è stata solo una conferma di quello che già era definito dal significato del teorema.

Ma è così? Fermat aveva detto di avere una dimostrazione del "teorema"; ma certo la sua dimostrazione – qualora l'avesse davvero pensata – non era certa quella delle 130 pagine di Wiles, che ha usato strumenti algebrici ignoti a Fermat e tali da rendere la dimostrazione comprensibile solo a un limitato numero di matematici esperti. È questa dimostrazione riproducibile? Certamente. Ma la dimostrazione stessa è ormai inscindibilmente legata al teorema di Fermat-Wiles e ne ha cambiato in parte il senso: ora il teorema è strettamente collegato a procedure matematiche che ne definiscono la riproducibilità. I matematici che volessero studiare il teorema devono studiare le dimostrazioni di Wiles e la sola formulazione del teorema non è sufficiente a una vera *comprensione* di cosa è stato dimostrato. Potremmo dire che i profani (come il sottoscritto) possono avere una vaga idea del contenuto del teorema nella sua definizione generale, ma a loro sfugge il significato profondo. Ma cosa è il significato profondo se non l'insieme delle procedure dimostrative utilizzate nella dimostrazione di Wiles? Questo potrebbe essere giustificato dall'idea di Wittgenstein per cui la matematica non è un "sistema" ma un "campionario eterogeneo di tecnice dimostrative". Per comprendere una prova matematica devi comprendere le specifiche tecniche dimostrative utilizzate per *quel* sistema di prova. Vi è alle spalle un'*ideale* di tecnica dimostrativa? Non esattamente; vi è l'idea di cosa può essere una dimostrazione e di cosa la differenzia da un esperimento; varie tecniche verranno sviluppate nella storia della matematica. Comprende il significato in questo caso è padroneggiare una tecnica[27].

Qui tocchiamo forse il clou dell'antiplatonismo wittgensteinano – la prova del teorema di Fermat è tale solo nel sistema di prova di Wiles; non esiste una prova indipendente e questa prova ha cambiato la nostra visione di quel pezzo di matematica. Non esiste per Wittgenstein una prova staccata da un sistema matematico o da un sistema di prova. Dato che è conoscendo la prova che si impara il significato di ciò che è provato, e gran parte della seconda filosofia della matematica di Wittgenstein è una ripresa della sua intuizione iniziale per cui in matematica "processo e risultato sono la stessa cosa". Questo perché, dal punto di vista anti-platonista, non esiste una qualche realtà indipendente dalla prova che viene ad essere "scoperta" dalla prova stessa. La prova consiste nel creare una *relazione interna* tra certe operazioni e un certo risultato[28]. In altre parole una prova non è *distaccabile* dal sistema di prove in cui è inserita, e la comprensione di ciò che è provato è strettamente connessa al tipo di prova e al metodo della prova. Questo aspetto sarà centrale per capire l'atteggiamento di Wittgestein rispetto al teorema di Gödel.

3. WITTGENSTEIN E GÖDEL

3.1 La visione "standard" delle critiche di Wittgenstein a Gödel – Il primo teorema di incompletezza di Gödel viene tipicamente presentato come il teorema per cui, in un sistema assiomatico non contraddittorio come i *Principia Mathematica* di Russell, è impossibile dimostrare tutte le proposizioni matematiche vere in quel sistema; in particolare si può costruire una formula aritmetica P – che rappresenta l'enunciato metamatematico 'P non è provabile' – formula che non è provabile, e quindi è vera ma non provabile. Gödel per certi versi chiude un'era di illusioni formaliste di dare un fondamento assiomatizzato alla matematica.

[27] Richiamo implicito alla visione di Wittgenstein 1953 sul linguaggio: "comprendere un linguaggio è padroneggiare una tecnica"

[28] Resta il problema che si possono avere diverse prove dello stesso teorema, come diverse procedure per la stessa prova. Qui non è facile vedere come si potrebbe sviluppare il punto di vista di Wittgenstein, ma credo che aiuterebbe la distinzione tra aspetti vero-funzionali e aspetti cognitivi-procedurali del concetto di senso fregeano, concetto che Wittgenstein non smette di richiamare nei suoi scritti, OFM comprese.

Wittgenstein ha dedicato diverse osservazioni al teorema di Gödel, ed è stato subito criticato e incolpato[29] di fare confusione tra sintassi e semantica; in particolare viene denunciato un lungo paragrafo delle OFM in cui Wittgenstein asserisce:

> "…'vero nel sistema di Russell' vuol dire: provato nel sistema di Russell; e 'falso nel sistema di Russell' vuol dire che la sua contraddittoria è stata provata nel sistema di Russell (…) se questa è la tua assunzione, ora rinuncierai all'interpretazione per cui la proposizione è [vera ma] indimostrabile" (OFM App.I: 8/App.III:8).

Il problema è che tipicamene si presenta il teorema di Gödel come il teorema che dimostra l'esistenza di proposizioni "vere ma non provabili", ove l'impossibilità di dare una prova dipende dalla interpretazione dei PM nella teoria dei numeri. Wittgenstein sarebbe dunque in errore nel dire che occorre abbandonare l'interpretazione corrente di P come "P non è provabile nel sistema di Russell", perché l'unica interpretazione rilevante è l'interpretazione in teoria dei numeri, ed è questa che permette di distinguere verità e provabilità (dimostrabilità).[30]

Nella valutazione negativa di Wittgenstein ha pesato, oltre all' "errore" di confondere sentiatti e semantica, il carattere sporadico delle riflessioni e il suo atteggiamento di sufficienza riguardo alla prova di Gödel come se il suo succo "filosofico" non fosse in fin dei conti alcunché di originale.

3.2. Wittgenstein e le interpretazioni filosofiche della prova di Gödel – In generale non si po' immaginare contrasto più grande che quello tra un costruttivista come Wittgenstein e un platonista come Gödel, che sicuramente avrebbe dato il suo assenso all'idea di Frege per cui il matematico è come il geografo che esplora e descrive terre inesplorate. Per Gödel il mondo della matematica è del tutto analogo al terzo regno fregeano dove una speciale intuizione aiuta a cogliere gli aspetti oggettivi preesistenti alla mente. Per Wittgenstein la matematica è altrettanto oggettiva, ma è una costruzione che dipende dal ruolo che assume nella comunità linguistica, ragione per cui la visione di Wittgenstein non è del tutto riducibile a una tesi di "dipendenza dalla mente", come accade per l'intuizionismo di Brouwer (curiosamente una conferenza di Brouwer a Vienna offrì l'unica occasione in cui Wittgenstein e Gödel si trovarono nella stessa stanza[31]). Per Gödel la logica matematica coglie la struttura essenziale dei concetti matematici, mentre Wittgenstein condanna "l'irruzione della logica matematica nella matematica". Vi sono però anche aspetti che uniscono fortemente Wittgenstein ai risultati del teorema di Gödel, e che vengono chiariti ancor più dagli appunti del *Nachlass* wittgensteiniano[32]. Penso ad esempio a quanto asserisce Wittgenstein in un passo inedito:

---

[29] A partire da Dummett e Bernays; non tutti i matematici però reagirono negativamente alle osservazioni di Wittgenstein su Gödel: Goodstein 1957 (p. 551) e 1972 (p. 279) rileva come Wittgenstein avesse capito che i risultati di Gödel mostravano che non si poteva esprimere in un sistema assiomatico la nozione di cardinale finito, e che le variabili numeriche devono necessariamente prendere valori diversi dai numeri naturali, una tesi che oggi è generalmente accettata dopo i risultati di Skolem 1934. Come ricorda anche Floyd 2001, Kreisel 1989, dopo un nota del 1958 fortemente critica sulle osservazioni di Wittgenstein su Gödel, ricorda le discussioni fatte negli anni '40 con Wittgenstein sulla prova di Gödel sostenendo che Wittgenstein negli anni '40 aveva certo compreso gli aspetti essenziali della prova, di cui parlava con "completo entusiasmo".

[30] A discolpa di Wittgenstein è anche il fatto che Gödel nel suo saggio del '31 dice che "dal fatto che [R(1);q] dice di se stessa che non è provabile segue immediatamente che [R(q);q] è vera". Il problema è che tutto ciò è irrilevante per la dimostrazione, e questo è l'errore di Wittgenstein come hanno sostenuto Bernays e Dummett. La proposizione indecidibile di Gödel non dovrebbe essere interpretata come "non provabile nel sistema di Russell". Non abbiamo alcun bisogno di assumere un significato in lingua naturale della proposizione 'P' per ottenere una contraddizione, perché è semplicemente un fatto della teoria dei numeri che una prova di 'P' ci permette di calcolare i numeri gödeliani e arrivare così a "non P" per generalizzazione esistenziale. Per una discussione più dettagliata sull' "errore" di Wittgenstein vedi Rodych 1999, pp. 181-182.

[31] Come ricorda lo stesso Gödel, per il quale le osservazioni di Wittgenstein sono non pertinenti. Commenta Floyd 2001, p. 280, che Gödel mostra verso Wittgenstein lo stesso atteggiamento sprezzante che Cantor mostrava verso Kant.

[32] Alcuni passi erano stati espunti dalla prima edizione delle OFM perché ritenuti troppo "offensivi" e tali da allontanare Wittgenstein dalla considerazione dei matematici (e non solo) per cui Gödel resta un idolo. Ma le apparenti "offese" erano riflessioni di Wittgenstein sulle ragioni del platonismo di Gödel che lui ovviamente osteggiava.

"Gödel ci ha mostrato una confusione nel concetto di 'matematica', che è mostrato dal fatto che la matematica veniva considerata essere un *sistema*"[33].

Wittgenstein, con il suo antifondazionalismo, aveva sempre lottato contro l'idea che la matematica fosse riducibile a un unico sistema formale alla Hilbert. Quindi il risultato di Gödel non poteva che confortarlo nella sua tesi. Inoltre, Wittgenstein discusse aspetti del teorema di Gödel con diversi studiosi, tra cui Watson, Turing e Kreisel, mostrando entusiasmo e apprezzamento per gli aspetti matematici del teorema[34]. Quindi pare assodato che le critiche di Wittgenstein si rivolgessero soprattutto non al teorema stesso, ma alle possibili interpretazioni filosofiche del teorema, a quello che egli chiamava "prosa".[35] Il punto di vista che a me pare più ragionevole è che Wittgenstein (a) apprezzasse il teorema di Gödel come teorema matematico[36], (b) non avesse intenzione di criticare il teorema,[37] (c) considerasse il teorema come un teorema di impossibilità analogamente al teorema della trisezione dell'angolo, che dimostra l'impossibilità di una costruzione geometrica (come il teorema di Gödel dimostra l'impossibilità di certe costruzioni formali)[38] (d) che la sua prima preoccupazione fosse discutere il concetto di "prova" in matematica; (e) che la sua critica fosse rivolta contro le speculazioni metafisiche, una tendenza che la sua filosofia ha sempre voluto combattere e non al risultato matematico.

Di fatto il teorema è stato abbondantemente usato da filosofi e fisici per generare una serie di riflessioni filosofiche sulla verità, che hanno tra gli esempi principali i lavori di Agazzi, Lucas, Hofstaedter e Penrose.[39] E non è escluso che proprio questo *tipo* di riflessioni siano quelle che Wittgenstein in qualche modo avrebbe intuito come possibili esiti "scorretti" della metafisica costruita attorno al teorema di Gödel. La discussione su Wittgenstein e Gödel sviluppata a partire dagli anni '80 con i lavori di Shanker, e in seguito di Floyd e Rodych ha ribaltato la lettura "standard" ostile alle riflessioni di Wittgenstein per rivalutare le sue non sempre perspicue osservazioni.[40]

3.3 Una rivalutazione delle critiche di Wittgenstein alla prova di Gödel – In quanto segue, per non perdermi nei meandri della letteratura critica, mi limito a illustrare –per quanto abbia capito

---

[33] Passo citato da Rodych 2002, ampia e utile discussione sulle note inedite di Wittgenstein su Gödel. Rodich cita e spiega passi che mostrano la comprensione corretta del teorema da parte di Wittgenstein, giustificando anche le considerazioni "scandalose", come quella in cui dice qualcosa come "non seguire le ragioni di Gödel perché sono ragioni stupide". Ovviamente questo suona scandaloso (chi può dire "stupido" a Gödel?!). Ma come nota privata si può capire: Wittgenstein aborriva il platonismo di Gödel.

[34] La presentazione di Watson 1938, che Wittgenstein apprezzò più volte esplicitamente, ringrazia per le discussioni avute con Wittgenstein e Turing; per dettagli su questo vedi Floyd 2001, §1) Kreisel 1959 racconta anche di come Wittgenstein si divertisse a inventare nuovi procedimenti diagonali

[35] Sul tema della contrapposizione tra prosa e calcolo vedi Penco 1981 e in particolare applicato alla discussione con Gödel la ripresa dello stesso tema in Shanker 1988 in Floyd 2001.

[36] Aspetto testimoniato abbondantemente da Kreisel, Watson, ecc.

[37] Contro l'opinione di Mark Steiner, per cui W. Voleva confutare il teorema di Gödel, o più precisamente la sua interpretazione semantica.

[38] Su questo ha scritto abbondantemente Schanker; nota Floyd 2001, p. 287 che ovviamente le sue riflessioni sul teorema della trisezione non hanno fatto pensare che volesse confutare il teorema!

[39] Agazzi è stato il primo in Italia a utilizzare il teorema di Gödel – da lui tradotto in italiano – per discutere di esiti metafisici. Agazzi 1978 (pp. 227-229) "riusciamo a dichiarare metateoricamente la validità della formula perché abbiamo, per così dire, la possibilità di 'vedere' i numeri naturali e le loro proprietà, anche quando queste non risultino derivabili da un certo sistema di assiomi" (p. 228). Le limitazioni dei formalismi indicano nella comprensione del significato e nell'intenzionalità (con un certo anticipo sulle tesi di Searle) ciò che caratterizza gli umani. Per Hofstaedter (1979, p. 277) in matematica la verità, come nello Zen, oltrepassa i limiti di ciò che si può dire formalmente; così in matematica "il teorema di Gödel ha stabilito l'esistenza di verità matematiche che giacciono al di là della comprensione dei sistemi formali. Le proposizioni della matematica non possono essere circoscritte attraverso i sistemi formali: ci saranno sempre verità matematiche che si collocano al di fuori". Per Penrose 1989 (p. 112) "la nozione di verità matematica va oltre lo stesso concetto di formalismo. C'è qualcosa di assoluto e "dato da Dio" sulla verità matematica. Questo è il punto del platonismo matematico. Ogni particolare sistema formale ha certo validi ruoli da giocare nella discussione matematica, ma essi possono fornire solo una guida parziale (o approssimata) alla verità. La verità matematica effettiva va oltre le costruzioni umane". Le ultime due citazioni paiono essere esemplari di ciò cui Wittgenstein cercava di reagire. Per non parlare delle argomentazioni di Lucas 1961.

[40] Vedi Shanker 1985, ma anche Floyd 2001; Rodych 1999, 2002, 2007 insiste sul costruttivista radicale di W. per il quale un asserto è un asserto matematico solo quando è stato provato (e non solo se è "provabile"). Berto 2009 sviluppa una analisi delle riflessioni di Wittgenstein legate alla tendenza dei logici a fuggire dalla contraddizione, collegando il tema al teorema di Gödel.

–la tesi di Floyd e Putnam 2000, sviluppata sulla scia di lavori di Shanker e Rodych. Floyd e Putnam prendono il toro per le corna e sostengono che il sopracitato passo al paragrafo 8 *non è un errore* da parte di Wittgenstein, ma l'espressione di un punto fondamentale che da una parte difende il valore del teorema di Gödel, dall'altra vuole eliminare la "prosa" che traduce il teorema in termini di "vero ma non dimostrabile".

1. E' molto probabile che Wittgenstein avesse capito e apprezzato il teorema di Gödel, e nel 1937 – quando scrive i suoi appunti su Gödel – avesse chiara la connessione tra il teorema di Gödel e quanto avrebbe dimostrato Skolem nel 1934[41], cioè che un sistema formale non può esprimere la nozione di numero cardinale finito e che ci sono modelli nonstandard dei numeri naturali.
2. la sua critica non è al teorema stesso, ma alla presentazione in lingua naturale del suo significato, cioè presentare la famosa formula di Gödel – chiamiamola "P" – come una proposizione "vera e non dimostrabile".
3. La forma che assume P nel primo teorema di incompletezza di Gödel può essere così espressa:

$$P = \neg (E\, x) (\text{NaturalN}\, (x)\ .\ \text{Prova}\, (x, t))$$

In italiano: non vi è un x tale che x è un numero naturale e *x* è la prova di *t*, dove "*t*" abbrevia un'espressine numerica il cui valore è il numero gödeliano di P. Nello specifico "prova (*n*, *m*)" abbrevia un predicato binario che si suppone definisca una relazione effettivamente calcolabile che esiste tra due numeri naturali *n* e *m* tale che *n* è il numero gödeliano di una sequenza la cui ultima riga è la formula con numero gödeliano *m*.
4. Floyd e Putnam danno rilievo al passo del § 8 in cui Wittgenstein, nel suo dialogo immaginario, assume l'ipotesi sia che P sia falso in PM. Ma questa possibile assunzione fa capire che tradurre a parole "P" come "P non è provabile" non rende in alcun caso l'idea del contenuto effettivo della prova di Gödel, anzi questa terminologia – come si esprime Watson 1937 – "nasconde più che spiegare" il senso della proposizione P. Il punto può forse esprimere ricordando che, dato che P non è dimostrabile, possiamo aggiungere ai PM sia P sia non P, cioè ci sono modelli in cui P è vera e modelli in cui P è falsa[42]. E questo rende incongruo tradurre "P" come "non provabile", dato che assumere la falsità di P comporterebbe la sua provabilità in PM. Questo inoltre nasconde la conseguenza centrale del teorema, cioè che i PM sono ω-incoerenti (anche se aggiungo ¬P, per cui ottengo un sistema coerente, ma non ω-coerente).
5. Per la ω-incoerenza, un sistema non ha alcun modello in cui il predicato che abbiamo interpretato come "x è un numero naturale" abbia un'estensione isomorfa ai numeri naturali (cioè in tutte le interpretazioni che sono modello dei PM ci sono entità che non sono numeri naturali e a fortiori non sono numeri gödeliani). In particolare un predicato come "x è prova di t" ha estensioni che invariabilmente contengono elementi che non sono numeri naturali. Questo risultato è un aspetto che Wittgenstein non può non vedere con favore: porre un limite alla possibilità di caratterizzare l'insieme dei numeri naturali come sistema formale rispecchia la sua critica alla "funesta irruzione della logica matematica in matematica".
6. La connessione tra il teorema di Gödel e la necessità di postulare modelli non standard era ben chiara a Wittgenstein e Watson; ma questo sarebbe, secondo Wittgenstein, oscurato nel mantenere la traduzione in lingua naturale di "P" come "P non è provabile". Come Wittgenstein diceva a Schlik nel 1935: per capire il significato di ciò che è dimostrato nella prova di Gödel occorre seguire la prova dalla A alla Z, e non tradurre la prova in un linguaggio fuorviante.

[41] Si dice normalmente che W. non conoscesse i risultati di Skolem sui modelli nonstandard; ma W. Seguiva con attenzione i lavori di Skolem, come si vede dalla sue riflessioni sulle prove ricorsive in *The Big Typescript* (around 1933: §130, rif. A Skolem, pp. 460-1)
[42] Così ad esempio presenta la "spiegazione usuale" Dummett 1963, p. 186.

Questo atteggiamento è coerente con l'idea di Wittgenstein per cui il senso di una prova è dato dalla prova stessa[43].

6. I primi critici videro nelle osservazioni di Wittgenstein una confusione tra verità e provabilità, tra semantica e sintassi, specie quando Wittgenstein sostiene che vero = provabile e "non provabile in PM" = "provabile in un altro sistema". Ma, anche senza il costruttivismo radicale di Wittgenstein, Floyd e Putnam rilevano che (i) una proposizione non provabile in un sistema può essere provabile in un altro sistema e (ii) una formula può essere vera in un sistema e falsa in un altro. Per (i) analogamente allla possibilità che una proposizione non provabile nella geometria Euclidea sia provabile nella geometria iperbolica, così una proposizione dei PM che non può essere provata può essere vera in un altro sistema; ma allora non potrà essere "vero" nello *stesso senso di* "vero in PM". Per (ii) basti pensare (è un esempio di Flpyd e Putnam) alla formula Ex ($x \in x$) [qualche insieme appartiene a se stesso] che è vero nel sistema di Quine e falso nel sistema di Zermelo. Ma la formula ha un diverso senso nei due sistemi. In un sistema formale, il termine "vero" è strettamente legato al sistema; essere vero è *essere un teorema del sistema* formale. Se abbiamo a che fare con un sistema formale "vero in PM" è ciò che è un teorema dei PM, quindi provabile in quel sistema. Quindi dire "vero ma non dimostrabile" fa confusione tra una nozione assoluta di verità a prescindere dal sistema, e di verità relativa al sistema.[44]

7. Perché dunque usare la terminologia di "vero e non dimostrabile" che oscura invece di chiarire il punto chiave del teorema di Gödel? Prima di tutto perché imporrebbe un concetto di "verità" che non corrisponde a quello che si dovrebbe intendere per "verità nei PM". Floyd e Putnam (p. 632) concludono: "Che il teorema di Gödel mostri che (1) ci sia una nozione ben definita di 'verità matematica' applicabile a ogni formula dei PM e che (2) se i PM sono coerenti, allora alcune 'verità matematiche' in *quel* senso sono indecidibili nei PM, *non* è un risultato matematico ma una tesi metafisica. Ma che se P è provabile nei PM allora i PM sono incoerenti, e se ¬P è provabile nei PM allora i PM sono ω-incoerenti è precisamente la tesi matematica che Godel ha provato" (p.632). La traduzione "in prosa" del "vero ma non provabile" oscura invece di chiarire il risultato più importante del teorema.

In sintesi ci sono due aspetti che si possono evidenziare nel lavoro di Wittgenstein su Gödel:

(i) per Wittgenstein la rilevanza di un teorema matematico è nelle sue tecniche di prova e non nella prosa che lo circonda; e su questo non non siamo molto distanti da quanto dice Lolli 2010 (cap.iv) quando ricorda che ""L'interesse duraturo, e attuale, dei teoremi di Gödel dipende … non tanto dal contenuto dei loro enunciati quanto dalla loro dimostrazione, dai concetti e dalle tecniche innovative ivi adottate…"

(ii) Wittgenstein insiste sulla tesi per cui il *senso* di una proposizione matematica è dato dalla procedura di prova: se consideriamo i PM come un sistema possiamo ben immaginare che un enunciato non provabile nel sistema di Russell possa essere vero in un altro sistema; ma in questo caso la proposizione assume per Wittgenstein un diverso senso, cioè il senso che le viene dato dalla prova; quindi è una proposizione *differente* dalla proposizione *non* provata nel sistema di Russell.[45] Quindi la proposizione che, in termini colloquiali, viene detta "vera ma non dimostrabile", viene detta "vera" in un senso diverso che "vera nel sistema di Russell".

In conclusione, la postulazione di un concetto di "verità matematica" applicabile a ogni formula a prescindere dal fatto che sia un teorema di uno specifico sistema è una tesi metafisica e non un risultato matematico, è "prosa" e non "calcolo". Nella nostra terminologia (vedi 2.5) si potrebbe dire che la provabilità di P non è *distaccabile* dal sistema in cui P viene provato; e

[43] Nedo and Ranchetti (1983), p. 260, citato da Floyd 2001

[44] Si potrebbe obiettare che per "vero" non si intende solo "teorema del sistema", ma anche "valido in tutti i modelli del sistema", questo pure rende un po' fuorviante parlare di "vero e non dimostrabile" della proposizione P del teorema di Gödel. Perché ovviamente la formula non è valida in tutti i modelli dei PM, quindi non è vera nel sistema dei PM. Più semplicemente Floyd e Putnam riconoscono che "valido in tutti i modelli del sistema" siriduce a "essre un teorema del sistema"

[45] "dopo esser stata provata, la proposizione 'P non può essere provata' ha un senso diverso da quello che aveva prima di essere provata" (OFM Appendice I, 16)

quanto viene provato vero in un altro sistema non è lo stesso "P" che non ha una prova della sua verità nel sistema di Russell. È dunque contro una tesi metafisica (il platonismo) e non contro il risultato matematico del teorema che Wittgenstein ha mosso le sue critiche. Queste analisi ci dovrebbero far capir meglio perché Wittgenstein ha detto: "nulla è più probabile del fatto che l'espressione linguistica del risultato di una prova matematica sia stata coniata in modo tale da ingannarci con un mito" (OFM II:26/III:26). Come abbiamo accennato prima, è come se Wittgenstein ci avesse messo in guardia contro le visioni platoniste che si sarebbero abbondantemente sviluppate nella discussione filosofica sul teorema di Gödel fino ai giorni nostri. Ma il teorema stesso è neutrale di fronte alle diverse filosofie della matematica, perché una buona prova matematica ha in se stessa le sue ragioni.

BIBLIOGRAFIA

NB –L'edizione del 1956 delle *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik* è stata quasi completamente stravolta dalla terza edizione del 1978. La traduzione italiana di Mario Trinchero ha voluto – a mio parere saggiamente – mantenere la struttura della prima edizione. Io mi rifaccio dunque *qui* alla numerazione della prima edizione e alla versione italiana della terza edizione pubblicata nel 1988, che mantiene tale numerazione. Qui do prima la numerazione della I edizione (e della traduzione italiana) seguita dalla numerazione dlle III edizione nel caso di differenza, cioè quasi sempre. Ad es. OFM I:151/I:152 vuol dire: Parte I, paragrafo 151 della prima edizione/Parte I, paragrafo 152 della seconda edizione (in questo caso la differenza è minima, ma pur sempre rilevante).

Agazzi, E. 1978 "Alcune osservazioni sul problema dell'intelligenza artificiale", in P.A. Rossi (a cura di) *Cibernetica e toeria del'informazione*, La Scuola, Brescia: 199-244.

Berto, Francesco (2009), "The Gödel Paradox and Wittgenstein's Reason", in *Philosophia Mathematica*: 1 – 12-

Borga M. Freguglia P, Palladino D. 1985, *I contributi fondazionali dela scuola di Peano*, Milano: Angeli.

Boghossian 2001 "How are objective Epistemic Reasons possible?" *Philosophical Studies* 106: 1–40.

Boghossian P. 2003 "Blind Reasoning" *Proceedings of the Aristotelian Society, Supplementary Volume*, no. 77, 2003, pp. 225–248.

Boghossian P. 2008 "Knowledge of Logic," in *New Essays on the A Priori*, ed. P. Boghossian and C. Peacocke, Oxford: Oxford University Press: 229-254.

Boghossian P. 2012 "What is Inference?" *Philosophical Studies* 2012

Bouveresse, J. (1977), "Il paradiso di Cantor e il purgatorio di Wittgenstein", in Andronico M., Marconi D., Penco C. (a cura di), in *Capire Wittgenstein*, Marietti, Genova, 1988.

Carroll L., "What the Tortoise Said to Achilles," *Mind* 4, No. 14 (April 1895): 278-280.

Casalegno P. (2011) "Un problema concernente le condizioni di asseribilità" in P.Casalegno, *Verità e Significato. Scritti di filosofia del linguaggio*, Carocci, Roma, 2011, pp. 63-81.

Centrone S. 2009, *Logic and Philosophy of Mathematics in the Early Husserl*, Springer.

Cozzo C. 2004 "Rule Following and the Objectivity of Proof" in *Wittgenstein Today*, a cura di A. Coliva e E. Picardi, Il Poligrafo, Padova 2004, pp. 189-204.

Dummett, M. (1959), "Wittgenstein's Philosophy of Mathematics", in *Philosophical Review*, 68

Dummett, M. (1963) "The Philosophical Significance of Gödel's Theorem", *Ratio* V: 140-155; ristampato in Dummett: *Truth and other Enigmas*, Duckworth, London, 1978.

Dummett M. (1975) "The Justification of Deduction", *Proceedings of the British Academy* 59 (1975), pp. 201-231; ristampato in Dummett, *Truth and Other Enigmas*, London: Duckworth, pp. 290-319; tr. it. in M. Dummett, *Verità e altri enigmi*, Milano: Il saggiatore (a cura di M. Santambrogio).

Engel P. (2007) "Dummett, Achilles and the Tortois", in R.E.Auxier e L. Hahn, *The Philosophy of Michael Dummett*, Chicago: Open Court, pp.725-746.

Floyd, Juliet (1995), "On Saying What You Really Want to Say: Wittgenstein, Gödel, and the Trisection of the Angle", in Hintikka J., *From Dedekind to Gödel*, Dordrecth: Kluwer.

Floyd Juliet, 2001 "Prose *versus* Proof: Wittgenstein on Gödel, Tarski and Turth", *Philosophia Mathematica* 3, vol. 9: 280-307.

Floyd Juliet, Putnam Hilary 2000, "A Note on Wittgenstein's 'Notorius Paragraph' about Gödel's Theorem", in *The Journal of Philosophy*, Vol. 97, N° 11: 624 – 632.

Frege 1879 *Begriffsshrift*, tr. it. In Mangione (a cura di) Frege, *Logica e aritmetica*. Torino: Boringhieri.

Frege 1881

Frege, G. 1884 *Die Grundlagen Der Arithmetik* Traduzione inglese di J.L. Austin, *The Foundations of Arithmetic*, Basil Blackwell, Oxford, 1953; tr. it. C. Mangione, in G: Frege, *Logica e Artimetica*, Torino: Boringhieri, 1965.

Frege, G. (1893/1903), *Grundgesetze der Arithmetik, Begriffsschriftlich abgeleitet*, 2 Voll., Verlag Hermann Pohle, Jena, Vol. I (1893), Vol. II (1903). Traduzione italiana (parziale) *Leggi fondamentali dell'aritmetica*, a cura di C. Cellucci, Teknos, Roma, 1994. Frege, Gottlob (1965), *Logica e aritmetica*, scritti raccolti a cura di C. Mangione, Boringhieri, Torino.

Frege G. 1896 "Lettera del Sig. Frege all'Editore" in Rivista di Matematica, VI, 1886-1889: pp.53-59; ristampato in

Frege 2001pp.84-92.
Frege 1902 “lettera a Jourdain” in G. Frege, *Alle origini della nuova logica*, a cura di C. Mangione, Torino: Boringhieri.
Frege G. 2001 *Senso, funzione e concetto. Scritti filosofici*, a cura di C.Penco ed E. Picardi, Roma: Laterza.
Geach, P. (1965) “Assertion”, *Philosophical Review*, ristampato in P. Geach, *Logical Matters*, Oxford: Blackwell, 1972, pp. 254-269
Goodstein, R. L. 1957 “Critical notice of remarks on the foundations of mathematics”, *Mind* 66, 549-553.
Goodstein, R. L. 1972 “Wittgenstein's philosophy of mathematics”, in A. Ambrose and M. Lazerowitz, eds., *Ludwig Wittgenstein: Philosophy and Language*. London: Allen & Unwin, pp. 271-286.
Gödel, Kurt (1931), “Uber formal unentscheidbare Satze der Principia Mathematica und verwandter Systeme, I,”, in Monatshefte fu¨r Mathematik und Physik, 38 (1931), pp. 173 – 198. Traduzione italiana e cura di Paolo Pagli, “Sulle proposizioni formalmente indecidibili dei Principia Mathematica e di sistemi affini, I”, in Shanker, Stuart G. (1989).
Gödel, Kurt (1931–32), “Über Völlständigkeit und Widerspruchsfreiheit”, Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums, Heft 3 (1930–31, pubblicato nel 1932). Traduzione italiana in “Sulla completezza e la non-contradditorietà”, in Casari, Ettore (a cura di), *Filosofia della matematica: Wittgenstein e Gödel Dalla logica alla metalogica. Scritti fondamentali di logica matematica*, Firenze: Sansoni, 1979.
Gödel, Kurt (2003), *Collected Works*, Oxford University Press, Oxford.
Hofstadter, Douglas R. (1979*), Gödel, Escher, Bach: An Eternal Golden Braid*, Basic Books, New York. Traduzione italiana di Barbara Veit, Giuseppe Longo, Giuseppe Trautteur, Settimo Termini, Bruno Garofalo, Gödel, Escher, Bach. Un’eterna ghirlanda brillante. Una fuga metaforica su menti e macchine nello spirito di Lewis Carroll, Adelphi, Milano, 1984.
Kreisel G. 1958, “Review of Wittgenstein's 'Remarks on the Foundations of Mathematics'”, *British Journal for the Philosophy of Science* 9, 135-158.
Kreisel G. 1959, “Wittgenstein's theory and practice of philosophy” *British Journal for the Philosophy of Science* 11: 238-252.
Kreisel G. 1978, “The motto of Philosophical Investigations and the philosophy of proofs and rules”, *Grazer Philosophische Studien* 6, 13-38.
Kreisel G. 1983, “Einige Erliiutenmgen zu Wittgensteins Kummer mit Hilbert und Gödel”, in P. Weingartner and J. Czermak, *Epistemology* and *Philosophy* of *Science*. *Proceedings* of *the 7th International Wittgenstein Symposium*. Vienna: Holder-Pichler-Tempsky Verlag, pp. 295-303
Lolli G. 2010, *Da Euclide a Gödel*, Bologna: Il Mulino.
Lucas J.R. “Mind, Machines and Gödel” *Philosophy*, XXXVI, 1961, pp.(112)-(127)
Macbeth D. 2005, *Frege’s Logic*, Harvard: Harvard University Press.
McGee V. 1985 “A Counterexample to Modus Ponens”, *The Journal of Philosophy*, 82, n.9.
Marion M. 2009 “Radical anti-realism,Wittgenstein and the length of proofs”, *Synthese*: 171:419–432
Palladino, Dario (2003), “La filosofia della matematica di Frege”, in Vassallo Nicla (a cura di), La filosofia di Gottlob Frege, Milano: Franco Angeli.
Palladino, Dario (2004), Logica e teorie formalizzate. Completezza, incompletezza, indecidibilità, Roma: Carocci.
Penco, C. (1981), *Matematica e gioco linguistico. Wittgenstein e la filosofia della matematica del ‘900*, Firenze: Le Monnier.
Penco C. (Penco, C. (2008), "Wittgenstein, olismo ed esperimenti mentali:l'influenza di Einstein" in *Paradigmi, 2, 2008*
Penco C. (2009) "Rational procedures: A Neo-Fregean Perspective on Thought and Judgement" in *The Dialogue*: 137-153.
Penco C. (2010) “The influence of Einstein on Wittgenstein’s Philosophy”, in *Philosophical Investigations* 33: 360-379.
Penrose, R. (1989): *The Emperor's New Mind: Concerning Computers, Minds, and the Laws of Physics*. New York: Oxford University Press.
Prawitz D. 2007 “Sei lezioni sulla Conseguenza logica”, Bologna 2007: http://www.cs.unibo.it/corsi/Lezione_4.pdf
Ryle, G. (1954) “If, So and Because”, in G. Ryle, *Dilemmas*, Oxford: Oxford U.P.
Rodych, V. (1999), “Wittgenstein’s Inversion of Gödel’s Theorem”, in *Erkenntnis*, Vol. 51, pp. 173 – 206
Rodych, V. (2002) “Wittgenstein On Gödel: The Newly Published Remarks”, in *Erkenntnis* 56: 379–397
Russell, B, - Whitehead A.N. (1910), *Principia Mathematica*, London: Cambridge University Prss 1910 (shortened edition to * 56: 1964).
Ryle G. 1950, “‘If’, ‘So’, and ‘Because’”, in M. Black (ed.), *Philosophical Analysis*, Ithaca: Cornell University Press
Santambrogio M. (2007), “Belief and Deductinve Inference”, in R.E.Auxier e L. Hahn, *The Philosophy of Michael Dummett*, Chicago: Open Court, pp. 699-718.
Shanker, S. G. 1988: “Wittgenstein's remarks on the significance of Gödel's”, in Shanker, S. G. (1988) a cura di, *Gödel’s Theorem in Focus*, London, Routledge. Traduzione italiana e cura di Paolo Pagli, Il teorema di Gödel – Una

messa a fuoco, Muzzio Editore, Padova, 1991.
Watson, A. (1938) 'Mathematics and its foundations', *Mind* 47, 440-45l.
Williamson T. Understanding and Inference in *Proceedings of the Aristotelian Society,* Supplementary Volume, no. 77, 2003, pp. 249-293-.
Wittgenstein, L. (1922) *Tractatus Logico-Philosophicus*. Trans. by C. K. Ogden. London: Routledge & Kegan Paul; Traduzione inglese con correzioni:1933.
Wittgenstein, L. (1953) *Philosophical Investigations*. G. E. M. Anscombe and R. Rhees, eds. Trans. by G. E. M. Anscombe. Second ed. Oxford: B1ackwell.
Wittgenstein, L. (1956) [OFM]: *Remarks on the Foundations of Mathematics*. G. H. von Wright, R. Rhees, G. E. M. Anscombe, eds. Trans. by G. E. M. Anscombe. Terza edizione: Oxford: B1ackwell, 1978.
Wittgenstein, L. (1974), *Philosophical Grammar*. R. Rhees, ed. Trans. by A. J. P. Kenny. Oxford: Blackwell.
Wittgenstein, L. (1975), *Philosophical Remarks*. R. Rhees, ed. Trans. by R. Hargreaves and R. White. Oxford: Blackwell.
Wittgenstein, L. (1973) *Ludwig Wittgenstein and the Vienna Circle. Shorthand notes recorded by F. Waismann*. A cura di B. McGuinness, Oxford: Blackwell, 1973 (tr.it. *Wittgenstein e il circolo di Vienna*, La Nuova Italia, Firenze 1975).
Wittgenstein, L. 1989, *1939 Cambridge Lectures on the Foundations of Mathematics*. C. Diamond, ed. Chiocago: The University of Chicago Press [LFM]